(1) 曲線 $y = xe^{-x}$ の変曲点における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) の曲線とその変曲点における接線と y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

〔広島工大〕

(1)

$y' = e^{-x} - xe^{-x}$

$= e^{-x}(1-x)$

$y'' = e^{-x}\cdot(-1) - e^{-x}(1-x)$

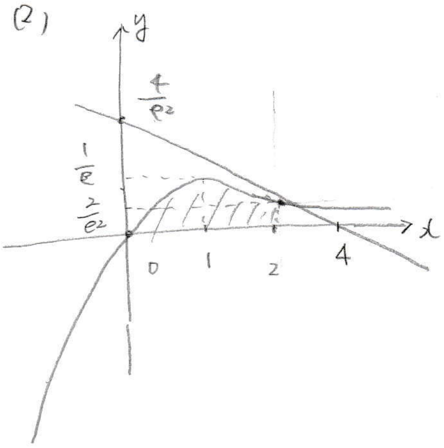
$= -e^{-x}(2-x)$ であり $e^{-x}>0$ であるから変曲点は $(2, 2e^{-2})$

である。変曲点における接線は

$y = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2}$

$\therefore$ $\underline{y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}}$

(2)



求める面積Sは

$S = \int_0^2 \left(-\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}\right)dx - \int_0^2 xe^{-x}dx$

$= \left[-\frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{4}{e^2}x\right]_0^2 - \left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}dx\right\}$

$= \left(-\cancel{\frac{2}{e^2}} + \frac{8}{e^2}\right) - \left\{\left(-\cancel{\frac{2}{e^2}}\right) + \left[-e^{-x}\right]_0^2\right\}$

$= \frac{8}{e^2} - \left(-\frac{1}{e^2} + 1\right)$

$= \frac{9}{e^2} - 1$

$\therefore$ $\underline{\frac{9}{e^2} - 1}$