3Cセミから7

e を自然対数の底, a を $1 \leqq a \leqq e^2$ を満たす定数とする。関数 $y = |e^x - a|$ のグラフと x 軸, y 軸および直線 $x = 2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(2) a が $1 \leqq x \leqq e^2$ の範囲を動くときの, $S(a)$ の最大値, 最小値を求めよ。

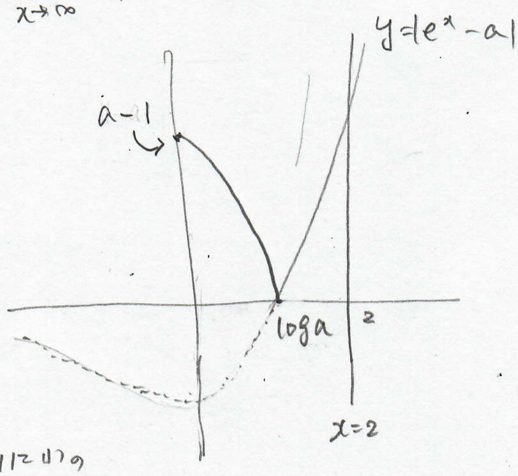
〔青山学院大〕

$e^x - a = 0$ とおくと

$e^x = a \qquad \log e^x = \log a \qquad \therefore x = \log a$

$\lim_{x\to-\infty} e^x - a = 0 \qquad y = e^x$

$\lim_{x\to\infty} e^x - a = \infty$



左図より $S(a) = \int_0^{\log a} (-e^x + a)\,dx + \int_{\log a}^{2} (e^x - a)\,dx$

$= \left[-e^x + ax\right]_0^{\log a} + \left[e^x - ax\right]_{\log a}^{2}$

$= \underbrace{-e^{\log a}}_{-a} + a\log a + 1 + e^2 - 2a \underbrace{- e^{\log a}}_{-a} + a\log a$

$= 2a\log a - 4a + e^2 + 1$

$\therefore S(a) = 2a\log a - 4a + e^2 + 1$

ちなみに以下の

$e^{\log a} = t$ とおくと

$\log a = \log t$

$t = a$

(2) $S'(a) = 2\log a + 2a \cdot \frac{1}{a} - 4$

$= 2\log a - 2$

$= 2(\log a - 1) \qquad \therefore a = e$ で極値をとる

$1 \leqq a \leqq e^2$ で増減表をかくと

x	0	…	e	…	e^2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	／	↘	e^2-2e+1	↗	e^2+1

以上より $S(a)$ は $a = e$ のとき最小値 $e^2 - 2e + 1$

$a = e^2 + 1$ のとき最大値 $e^2 + 1$