

3C 練習 77

2曲線 $y = \log x$, $y = 2\log x$ の共通接線とこの2曲線とで囲まれる図形の面積を求めよ。 [北海道大]

$$f(x) = \log x \quad g(x) = 2\log x \text{ とおく。}$$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ で $f(x)$ 上の点 $(t, \log t)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t \quad \text{①} \quad \text{[接線の方程式は]}$$

$$g'(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) \text{ 上の点 } (s, 2\log s) \text{ における接線の方程式は}$$

$$y = \frac{2}{s}(x-s) + 2\log s \quad \text{②}$$

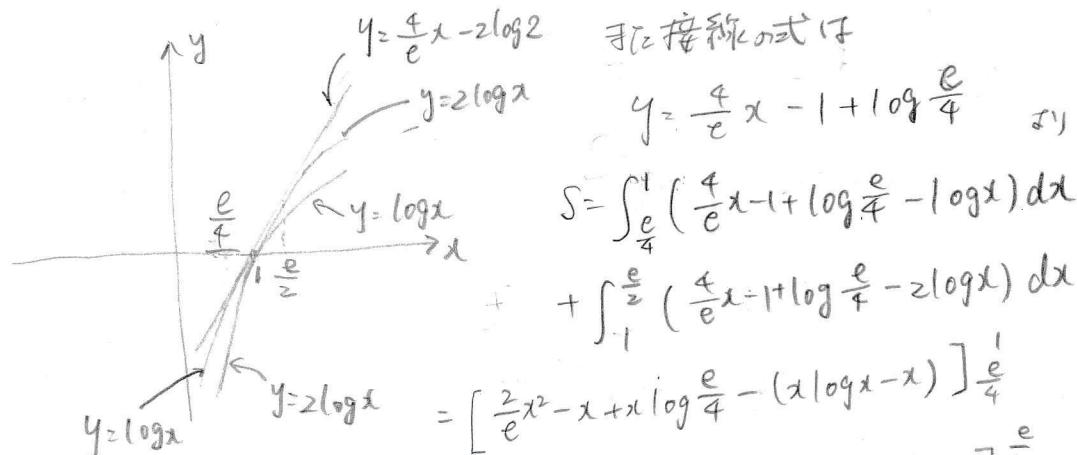
$$\text{①} \text{ と } \text{②} \text{ が一致するから } \frac{1}{t} = \frac{2}{s} \quad s = 2t \quad \text{③}$$

$$-1 + \log t = -2 + 2\log s$$

$$\log s^2 - \log t = 1$$

$$\log \frac{s^2}{t} = 1 \quad \text{③} \text{ で } \log 4t = 1 \quad \therefore t = \frac{e}{4} \quad \text{[接線の方程式は]}\quad \text{④} \quad \text{[接線の方程式は]}$$

したがって $f(x)$ と $g(x)$ 交点は $\log x = 2\log x \iff 1$ 。



$$y = \frac{4}{e}x - 2\log 2 \quad \text{[接線の方程式は]}$$

$$y = \frac{4}{e}x - 1 + \log \frac{e}{4} \quad \text{[接線の方程式は]}$$

$$S = \int_{\frac{e}{4}}^1 \left(\frac{4}{e}x - 1 + \log \frac{e}{4} - \log x \right) dx$$

$$+ \int_1^{\frac{e}{2}} \left(\frac{4}{e}x - 1 + \log \frac{e}{4} - 2\log x \right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{e}x^2 - x + x \log \frac{e}{4} - (x \log x - x) \right]_{\frac{e}{4}}^1$$

$$+ \left[\frac{2}{e}x^2 - x + x \log \frac{e}{4} - 2(x \log x - x) \right]_1^{\frac{e}{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{e} - 1 + \log \frac{e}{4} + 1 \right) - \left(\frac{e}{8} - \frac{e}{4} + \frac{e}{4} \log \frac{e}{4} - \frac{e}{4} \log \frac{e}{4} + \frac{e}{4} \right)$$

$$+ \left(\frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \log \frac{e}{4} - e \log \frac{e}{2} + e \right) - \left(\frac{2}{e} - 1 + \log \frac{e}{4} + 2 \right)$$

$$= -\frac{e}{8} + \frac{e}{2}(\log e - \log 4) - e(\log e - \log 2) + e - 1$$

$$= -\frac{e}{8} + \frac{e}{2} - e \log 2 - e + e \log 2 + e - 1 \quad \text{数樂} \quad \text{http://www.mathtext.info/}$$

$$= \frac{3}{8}e - 1$$