3cセキ分 8

関数 $f(x)$ を $f(x)=4\cos^3 x+3\sin^3 x$ と定義する。このとき

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における最大値は $\boxed{}$, 最小値は $\boxed{}$ である。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

ただし分数はすべて既約分数とする。

〔青山学院大〕

(1) $f'(x) = -12\sin x\cos^2 x + 9\sin^2 x\cos x$

$= 3\sin x\cos x(3\sin x - 4\cos x)$

$= 5\cdot 3\sin x\cos x\{\sin(x-\alpha)\}$　　$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$= 15\sin x\cos x\sin(x-\alpha)$　　$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

増減表をかくと

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	$\frac{12}{5}$	↗	3

$f(\alpha) = 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{108}{125} + \frac{192}{125} = \frac{12}{5}$

これより $\begin{cases} \text{最大値は } x=0 \text{ のとき } 4 \\ \text{最小値は } x=\alpha \text{ のとき } \frac{12}{5} \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^3 x + 3\sin^3 x\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$\sin x = a$ とおくと　$x: 0\to\frac{\pi}{2}$　$a: 0\to 1$, $\cos x\,dx = da$

$\cos x = b$ とおくと　$x: 0\to\frac{\pi}{2}$　$b: 1\to 0$, $-\sin x\,dx = db$

これより 上の式は

$\displaystyle 4\int_0^1(1-a^2)\,da - 3\int_1^0(1-b^2)\,db = 4\int_0^1(1-a^2)\,da + 3\int_0^1(1-b^2)\,db$

$= 4\left[a-\frac{a^3}{3}\right]_0^1 + 3\left[b-\frac{b^3}{3}\right]_0^1$

$= \frac{8}{3}+\frac{6}{3}$

$= \frac{14}{3}$　　$\frac{14}{3}$