3L七抑分81

関数 $f(x)=e^{-x}\sin x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値, 最小値を与える x の値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

〔山梨大〕

(1) $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$\cos x=\sin x$ より $0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	0

これより $x=\frac{\pi}{4}$ のとき極大かつ最大値をとる

$x=\frac{5}{4}\pi$ のとき極小かつ最小値をとる.

(2) 求める面積Sは

$S=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x-\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x\,dx \quad \cdots①$

ここで $\int e^{-x}\overset{-\cos x}{\sin x}\,dx=[-e^{-x}\cos x]-\int e^{-x}\overset{\sin x}{\cos x}\,dx$

$=-e^{-x}\cos x-\{[e^{-x}\sin x]+\int e^{-x}\sin x\,dx\}$

$2\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$\therefore \int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ より

①は

$S=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\pi}+\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{\pi}^{2\pi}$

$=\frac{1}{2}e^{-\pi}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-2\pi}-\left(-\frac{1}{2}e^{-\pi}\right)$

$=\frac{1}{2}e^{-2\pi}+e^{-\pi}+\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}e^{-2\pi}+e^{-\pi}+\frac{1}{2}$