3C積分83

曲線 $y=\sqrt{x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を, x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めなさい。

〔横浜市大〕

求める体積を V とすると、$0 \leqq x \leqq \pi$ であるから

$$V = \pi\int_0^{\pi}(\sqrt{x}\sin x)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx \quad \cdots ①$$

$\sin^2 x =$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos 2x$

ここで $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx = \left[x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right] - \int\frac{\sin 2x}{2}\,dx$ より ①は

$\dfrac{\sin 2x}{2}$

$$① = \pi\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} - \frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2}\left\{(0-0)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi^3}{4}$$