3C積分85

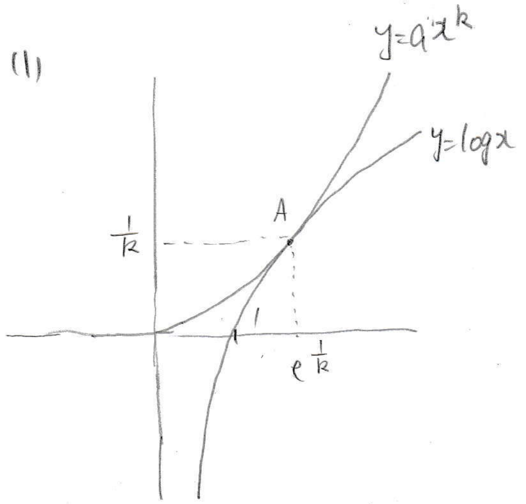
kを正の定数とする。2つの曲線 $y = ax^k$ と $y = \log x$ (自然対数) は1点Aを共有し，かつAにおける2曲線の接線は一致している。

(1) 定数 a および点Aの座標を k を用いて表せ。

(2) この2曲線と x 軸とで囲まれる部分を，x 軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔京都府立医大〕

(1)



$ax^k = \log x$　また接線の傾きが一致するから

$kax^{k-1} = \frac{1}{x}$　これより

$x^k = \frac{1}{ka}$　∴ $\frac{1}{k} = \log x$

ゆえにAのx座標は e^{-k}　$y = \log e^{-k} = \frac{1}{k}$

Aの座標は $A(e^{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k})$

$e^{\frac{1}{k}\cdot k} = \frac{1}{ka}$ より $ka = \frac{1}{e}$　∴ $a = \frac{1}{ke}$

$A(e^{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k})$　$a = \frac{1}{ke}$

$x\log x - x$

$\log x \log x$

$\log x(x\log x - x) - \int \log - 1\, dx$

$-(x(\log - x) + x$

(2) 求める体積をVとすると

$V = \pi\int_0^{e^{\frac{1}{k}}}\left(\frac{1}{ke}x^k\right)^2 dx - \pi\int_1^{e^{\frac{1}{k}}}(\log x)^2 dx$

$= \frac{\pi}{k^2e^2}\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{k}}} - \pi\left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right]_1^{e^{\frac{1}{k}}}$

e^{-k}

$= \frac{\pi}{k^2(k+1)}e^{-k} - \pi\left[\left(\frac{1}{k^2}e^{-k} - \frac{2}{k}e^{-k} + 2e^{-k}\right) - 2\right]$

$= \pi e^{-k}\left(\frac{1}{k^2(2k+1)} - \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} - 2\right) + 2\pi = \pi e^{-k}\left\{\frac{1 - (2k+1) + 2k(2k+1) - 2k^2(2k+1)}{k^2(2k+1)}\right\} + 2\pi$

$= \pi e^{-k}\left(-\frac{4k-2}{2k+1}\right) + 2\pi$

$= 2\pi\left(1 - \frac{2k-1}{2k+1}e^{-k}\right)$

$+4k^2 + \ -4k^3 - 2k^2$

$-4k^3 + 2k^2$

$-\frac{4k-2}{2k+1}$