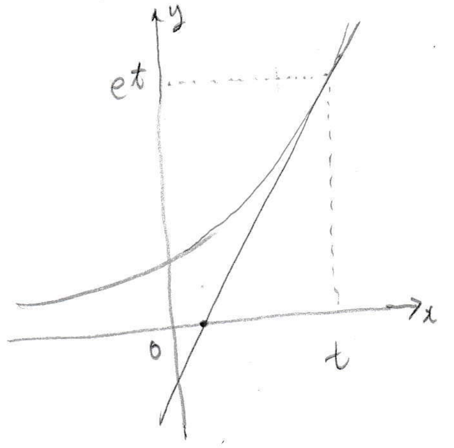
3C積分86

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において, 曲線 $y = e^x$ と点 (t, e^t) におけるこの曲線の接線とにはさまれる部分を, x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。t が区間 $0 \leqq t \leqq 1$ を変化するとき, $V(t)$ が最大値をとる t の値と, 最小値をとる t の値を求めよ。　〔鳥取大〕

$y' = e^x$ より 接線の式は $y = e^t(x-t) + e^t$



$y = e^t x - te^t + e^t = e^t(x - t + 1)$

求める体積を $V(t)$ とすると

$$V(t) = \pi\int_0^1 (e^x)^2 dx - \pi\int_0^1 e^{2t}(x-t+1)^2 dx$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \pi\left[e^{2t}\cdot\frac{(x-t+1)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \pi e^{2t}\left\{\frac{(2-t)^3}{3} - \frac{(1-t)^3}{3}\right\}$$

$$= \pi\left(\frac{e^2-1}{2} - \frac{3t^2-9t+7}{3}\cdot e^{2t}\right)$$　$8-12t+6t^2-t^3$　$-1+3t-3t^2+t^3$

$V(t)$ を t で微分すると　$3t^2-9t+7$

$$V'(t) = \pi\left\{(-2t+3)e^{2t} - 2e^{2t}\cdot\frac{3t^2-9t+7}{3}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{3}e^{2t}(6t - 9 + 6t^2 - 18t + 14)$$

$$= -\frac{\pi}{3}e^{2t}(\underbrace{6t^2-12t+5}_{①})$$

$e^{2t} > 0$ より ①を t の二次方程式として解を求めると

$6(t-1)^2 - 1 = 0$　$(t-1)^2 = \frac{1}{6}$　$t - 1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$　$\therefore t = \frac{6-\sqrt{6}}{6}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で

極値をとる. また $V(0) > V(1)$ であるから, 最小値をとるのは

$t = \frac{6-\sqrt{6}}{6}$, 最大値をとるのは $t = 0$