3C 積分88

$f(x)=xe^{1-x},\ g(x)=xe^{x-1}$ とおく。

(1) $y=f(x)$ のグラフ, および $y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) 2つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔愛媛大〕

(1) $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$ $\qquad f''(x)=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=(x-2)e^{1-x}$

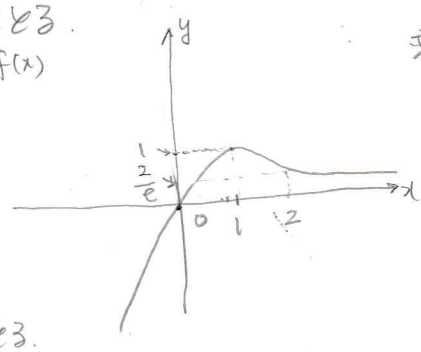
$g'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(1+x)e^{x-1}$ $\qquad g''(x)=e^{x-1}+(1+x)^{x-1}=(x+2)e^{x-1}$

$f'(x)$ で $e^{1-x}>0$ より $x=1$ のとき極値をとる.

変曲点は $\left(2,\frac{2}{e}\right)$

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		1	$\searrow$	0

f(x)

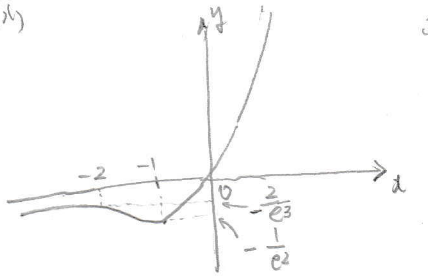


$g'(x)$ で $e^{x-1}>0$ より $x=-1$ のとき極値をとる.

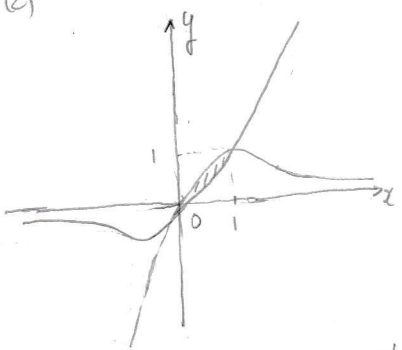
変曲点は $\left(-2,-\frac{2}{e^3}\right)$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	∞

g(x)



(2)



$f(x)=g(x)$ として

$xe^{1-x}=xe^{x-1}$

$x(e^{1-x}-e^{x-1})=0$ $\qquad x=0,\ x=1$ で交わる

$1-x=x-1$

$2x=2 \quad x=1$

$\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^1 xe^{1-x}dx-\int_0^1 xe^{x-1}dx$

$=-2+e-\frac{1}{e}$

$\int_0^1 xe^{1-x}dx=\int_0^1 x(-e^{1-x})'dx$

$=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx$

$=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1$

$=-1+(-1+e)$

$=-2+e$

$\int_0^1 xe^{x-1}=\int_0^1 x(e^{x-1})'dx$

$=\left[xe^{x-1}\right]_0^1-\int_0^1 e^{x-1}dx$

$=\left[xe^{x-1}\right]_0^1-\left[e^{x-1}\right]_0^1$

$=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)$

$=\frac{1}{e}$

$\therefore\ \underline{e-\frac{1}{e}-2}$