3C積分89

xy 平面上の曲線 $C : y = a\log x + b \ (a > 0)$ に原点Oから接線 l を引き, その接点をPとする。ただし, 対数は自然対数とする。

(1) 曲線 C, 接線 l および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(2) 面積 S が一定になるように a, b を変化させるとき, 点Pはどのような曲線をえがくか。

〔岐阜大〕

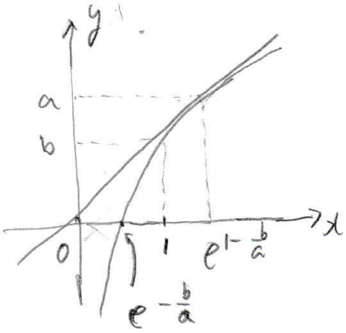
(1) 接点P$(t,\ a\log t + b)$ とする

$y' = \dfrac{a}{x}$ より 接線の式は $y = \dfrac{a}{t}(x - t) + a\log t + b \cdots ①$

①が原点を通るので ①に $(0, 0)$ を代入すると

$-a + a\log t + b = 0$

$a\log t = a - b \qquad \log t = 1 - \dfrac{b}{a} \qquad \therefore t = e^{1-\frac{b}{a}}$ 　接線の式は $y = \dfrac{a}{e^{1-\frac{b}{a}}}x$



求める面積 S は

$$S = \int_0^{e^{1-\frac{b}{a}}} \frac{a}{e^{1-\frac{b}{a}}}x\,dx - \int_{e^{-\frac{b}{a}}}^{e^{1-\frac{b}{a}}} a\log x + b\ dx$$

$$= \left[\frac{a}{2e^{1-\frac{b}{a}}}x^2\right]_0^{e^{1-\frac{b}{a}}} - \Big[ax\log x - ax + bx\Big]_{e^{-\frac{b}{a}}}^{e^{1-\frac{b}{a}}}$$

$$= \frac{a}{2}e^{1-\frac{b}{a}} - \left[e^{1-\frac{b}{a}}\left\{a\left(1-\frac{b}{a}\right) - a + b\right\} - e^{-\frac{b}{a}}\left\{a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) - a + b\right\}\right]$$

$a - b - a + b$ 　　　$-b - a + b$

$$= \frac{a}{2}e^{1-\frac{b}{a}} - ae^{-\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{a}{2}e^{-\frac{b}{a}}(e-2)$$

よって $S = \dfrac{a}{2}e^{-\frac{b}{a}}(e-2)$

(2) S 一定より $ae^{-\frac{b}{a}} = \dfrac{2S}{e-2}$ (一定) となる これに両辺 e をかけると

$a\cdot e^{1-\frac{b}{a}} = \dfrac{2eS}{e-2}$ 　$Q(x, y) = (a,\ e^{1-\frac{b}{a}})$ とすると

$xy = a\cdot e^{1-\frac{b}{a}} = \dfrac{2eS}{e-2}$ $(x>0)$ より Qは 直角双曲線 $xy = \dfrac{2eS}{e-2}$ の

第1象限をえがく