3C積分90

曲線 $C : y = e^{ax}$ $(a \neq 0)$ について次の問いに答えよ。ただし, a は正の定数とする。

(1) C 上の点 (t, e^{at}) における接線の方程式を求めよ。さらに, この接線が原点を通るとき, この接線を l と表す。接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 l, 曲線 C および y 軸で囲まれた図形 D の面積が 1 となるような a の値を求めよ。

(3) 図形 D を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積が π となるような a の値を求めよ。

〔北海道学園大〕

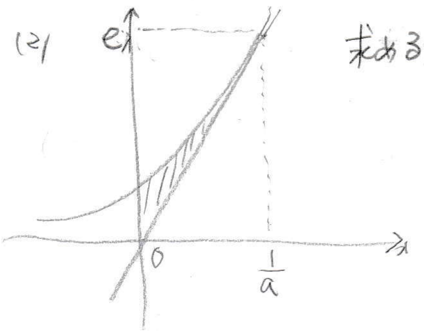
(1) $y' = ae^{ax}$ 接点は (t, e^{at}) より 求める接線は

$$y = ae^{at}(x-t) + e^{at} \quad \therefore \underline{y = ae^{at}x - e^{at}(at-1)} \cdots ①$$

①が原点を通るから $(0,0)$ を代入すると

$e^{at}(at-1) = 0$ $e^{at} > 0$ より $t = \frac{1}{a}$ $\therefore$ $\underline{y = aex}$ $\cdots ②$

(2)



求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax} - aex)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{2}aex^2\right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}e - \frac{1}{2a}e - \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{2a}e - \frac{1}{a} \cdots ①$$

①$=1$ より $\frac{1}{2a}e - \frac{1}{a} = 1$

$e - 2 = 2a$ $\therefore$ $\underline{a = \frac{e-2}{2}}$

(3) 求める体積 V は

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax})^2\,dx - \frac{1}{3}\pi e^2 \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2a}e^{2ax}\right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{1}{3a}e^2\pi$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2a}e^2 - \frac{1}{2a}\right) - \frac{1}{3a}e^2\pi$$

$$= \frac{1}{6a}e^2\pi - \frac{1}{2a}\pi$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{2}\right) \cdots ①$$

①$=\pi$ より $\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \pi$ $\therefore$ $\underline{a = \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{2}}$