3C 積分94

関数 $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{2-x}{x^2+1}$ について, 次の各問に答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, その極値を求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ および直線 $x = 0$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔宮城教育大〕

(1) $f(x) = x$ とおくと

$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2-x}{x^2+1} = 0$ となり $\dfrac{2-x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ から $4-2x = x^2+1$

$x^2+2x-3=0$ $(x+3)(x-1)=0$ となり $x=-3, 1$

$\therefore$ $x = -3, 1$

(2) $f'(x) = 1 + \dfrac{-(x^2+1)-(2-x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+5x^2-4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$

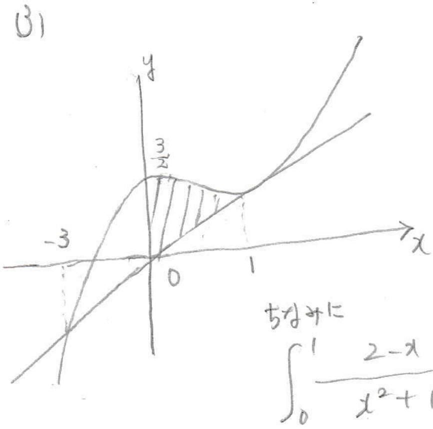
$x^2+x+4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ となり $x^2+x+4=0$ を満たす実数解はない

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(0) = \frac{3}{2}$ $\therefore$ $f(x)$ は $x=0$ のとき極大値 $\frac{3}{2}$

$f(1) = 1$ $x=1$ のとき極小値 1 をとる

(3)



求める面積は左図の斜線部 斜線部の面積を S とすると

$S = \displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{2-x}{x^2+1}\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{2-x}{x^2+1} dx$ $\cdots$ ①

ちなみに

$\displaystyle\int_0^1 \frac{2-x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ であり

ここで

$x = \tan\theta$ とすると $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta} d\theta$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\tan^2+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

$x : 0 \to 1$
$\theta : 0 \to \frac{\pi}{4}$

また $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$

以上より①は $S = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\log 2$