3C積分95

関数 $f(x)$ を $f(x)=xe^{-x}$ と定める。ここで, e は自然対数の底である。

(1) $f(x)$ の第1次導関数 $f'(x)$, および, 2次導関数 $f''(x)$ を求めなさい。

(2) 座標平面において, 曲線 $C: y=f(x)$ 上の点における C の接線のうち, 傾きが最小となるものを l とする。その接線 l の方程式を求めなさい。

(3) (2) の接線 l の下側の部分で, 曲線 C, 接線 l, x 軸の3つで囲まれた図形の面積を求めなさい。

〔東京理科大〕

(1) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

(2) 傾きが最小 → $f'(x)$ の最小値を考える

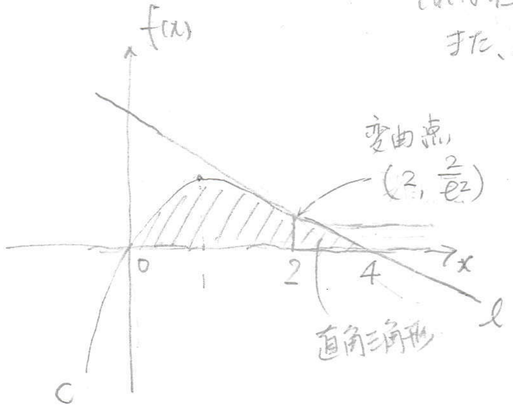
$f'(x)=g(x)=(1-x)e^{-x}$

$g'(x)=f''(x)=(x-2)e^{-x}$ より $g(x)$ は $x=2$ で極値をとる

それは極小かつ最小で $-\frac{1}{e^2}$

x	…	2	…
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↗

また、これは $f(x)$ の変曲点を通る接線である



変曲点は $(2, 2e^{-2})$ である

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$ より求める接線 l は

$l: y=-\frac{1}{e^2}(x-2)+\frac{2}{e^2}$

A $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

(3) 求める面積は上の斜線部分

$\int_0^2 xe^{-x}\,dx+2\times\frac{2}{e^2}\times\frac{1}{2}$

$\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx+C$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

$=(-1-x)e^{-x}+C$

$=\left[(-1-x)e^{-x}\right]_0^2+\frac{2}{e^2}$

$=-\frac{3}{e^2}+1+\frac{2}{e^2}$

$=1-\frac{1}{e^2}$