2015 芝大

(1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{\infty}=0$$

(2)

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}=e^x(1+e^x)^{-1}$$

$$f'(x)=e^x(1+e^{-x})^{-1}-e^x(1+e^x)^{-2}\cdot e^x$$

$$=\frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$$

$f'(x)=e^x(1+e^x)^{-2}$ より

$$f''(x)=e^x(1+e^x)^{-2}-2e^x(1+e^x)^{-3}e^x$$

$$=\frac{e^x(1+e^x)-2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

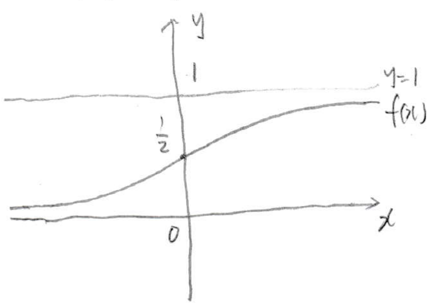
x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1

$x<0$ で $f(x)$ は下に凸

$x>0$ で $f(x)$ は上に凸

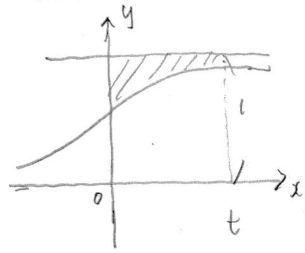
変曲点は $(0, \frac{1}{2})$

グラフの概形は以下



(3)

面積は



縦1、横tの長方形の面積から

$\int_0^t f(x)dx$ を引けばよい

よって

$$S(t)=t\times1-\int_0^t\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=t-\int_0^t\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}dx$$

$$=t-\Big[\log(1+e^x)\Big]_0^t$$

$$=t-\log(1+e^t)+\log2$$

よって $S(t)=t-\log(1+e^t)+\log2$

(4)

$S(t)$ は次のように変形できる

$$S(t)=t-\log e^t(e^{-t}+1)+\log2$$

$$=t-\{\log e^t+\log(e^{-t}+1)\}+\log2$$

$$=\cancel{t}-\cancel{t}-\log(e^{-t}+1)+\log2$$

$$=-\log(e^{-t}+1)+\log2$$

よって

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\{-\log(e^{-t}+1)+\log2\}$$

$$=\log2$$

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\log2$$