2015 静岡大

(1)

$$f(x)=\int_x^{x+1}\log t\,dt$$

$$=\left[t\log t-t\right]_x^{x+1}$$

$$=(x+1)\log(x+1)-(x+1)-(x\log x-x)$$

$$=(x+1)\log(x+1)\cancel{-x}-1-x\log x\cancel{+x}$$

よって

$$f(x)=(x+1)\log(x+1)-x\log x-1$$ //

$$f'(x)=\log(x+1)+\cancel{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-\log x-\cancel{x\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\log(x+1)-\log x$$

(2) $$\int_1^2\{(x+1)\log(x+1)-x\log x-1\}\,dx \quad \cdots ①$$

$$\int_1^2(x+1)\log(x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(x+1)\,dx$$

$$=\frac{9}{2}\log3-2\log2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+1)^2\right]_1^2$$

$$=\frac{9}{2}\log3-2\log2-\frac{5}{4}$$

$$\int_1^2x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2x\,dx$$

$$=2\log2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=2\log2-\frac{3}{4}$$

$$\int_1^2dx=\left[x\right]_1^2=1$$

$$①=\frac{9}{2}\log3-2\log2-\frac{5}{4}-\left(2\log2-\frac{3}{4}\right)-1$$

$$=\frac{9}{2}\log3-4\log2-\frac{3}{2}$$ //

(3) $g(x)=k(x+1)$ とおいて

$f(x)=g(x)$ を考えるとき

$(x+1)\log(x+1)-x\log x-1=k(x+1)$ から

$\log(x+1)-\dfrac{x\log x+1}{x+1}=k$ となるので

$h(x)=\log(x+1)-\dfrac{x\log x+1}{x+1}$ と $y=k$ の

共有点を調べると

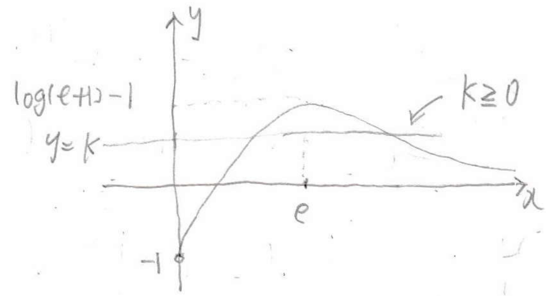
$$h'(x)=\frac{(x+1)-(\log x+1)(x+1)+x\log x+1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)-\cancel{x\log x}-\log x\cancel{-x}\cancel{-1}\cancel{+x\log x}\cancel{+x}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1-\log x}{(x+1)^2}$$

真数条件より $x+1>0$, $x>0$ となるより $x>0$ の範囲で考えると

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	/	$+$	0	$-$
$h(x)$	/	↗	極大	↘



$k\geqq0$ 以上より

$$0\leqq k\leqq\log(e+1)-1$$

のとき 共有点をもつ.