2013山梨大

(1)

$$S_n=\int_0^\pi \sin^n x\,dx$$

$n=1$のとき

$$S_1=\int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$=\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$=1-(-1)$$

$$=2$$

$n=2$のとき

$$S_2=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$

$$=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2}\pi$$

(2)

$$S_{n+2}=\int_0^\pi \sin^{n+2}x\,dx$$

$$=\int_0^\pi \sin x\sin^{n+1}x\,dx$$

$$=\underbrace{\left[-\cos x\sin^{n+1}x\right]_0^\pi}_{0}+(n+1)\int_0^\pi \cos x\sin^n x\cdot\cos x\,dx$$

$$=(n+1)\int_0^\pi(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx$$

$$=(n+1)\int_0^\pi \sin^n x\,dx-(n+1)\int_0^\pi \sin^{n+2}x\,dx$$

$$=(n+1)S_n-(n+1)S_{n+2}$$

$$(n+2)S_{n+2}=(n+1)S_n$$

よって

$$\frac{S_{n+2}}{S_n}=\frac{n+1}{n+2}\quad となる$$

(3)より $n\geqq 3$ のとき

$$(n+1)S_{n+1}=nS_{n-1}\quad\cdots①$$

$$nS_n=(n-1)S_{n-2}\quad\cdots②$$

よって ①×②より

$$n(n+1)S_nS_{n+1}=n(n-1)S_{n-2}S_{n-1}$$

$$S_nS_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}S_{n-2}S_{n-1}$$

$S_nS_{n+1}=a_n$とおくと

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-2}$$

$$a_1=S_1\cdot S_2=2\cdot\frac{1}{2}\pi=\pi$$

また(2)より

$$\frac{S_3}{S_1}=\frac{1+1}{1+2}\rightarrow S_3=\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}$$

$$a_2=S_2S_3=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

$n\geqq 3$であることに注意すると

nが奇数のとき

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-5}}{\cancel{n-3}}\cdots\frac{3-1}{\cancel{3+1}}a_{3-2}$$

$$=\frac{2}{n+1}a_1=\frac{2\pi}{n+1}\quad\cdots③$$

nが偶数のとき

$$a_n=\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-5}}{\cancel{n-3}}\cdots\frac{4-1}{\cancel{4+1}}a_{4-2}$$

$$=\frac{3}{n+1}a_2=\frac{3}{n+1}\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{2\pi}{n+1}\cdots④$$

③,④より

$$\lim_{n\to\infty}nS_nS_{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\pi}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to}\frac{2\pi}{1+\frac{1}{n}}=2\pi$$