[illegible]

(1)

$y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ とし

$x=\dfrac{e^y-ae^{-y}}{2}$ とする

これをyについて解く。

$2x=e^y-ae^{-y}$

$2xe^y=(e^y)^2-a$

$(e^y)^2-2xe^y-a=0$

e^yの2次方程式として解を求める

$(e^y-x)^2-x^2-a=0$

$(e^y-x)^2=x^2+a$

$e^y=x\pm\sqrt{x^2+a}$　$e^y>0$より

$e^y=x+\sqrt{x^2+a}$

よって

$y=\log(x+\sqrt{x^2+a})$

したがって $f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a})$

(2)

$$f^{-1}(x)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot(x+\sqrt{x^2+a})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)$$

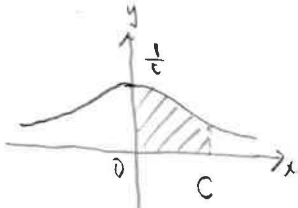
$$=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}}\cdot\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

$\therefore\ f^{-1}(x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(3)

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$　xに$-x$を代入してもかわらない



求める面積Sは

$$S=\int_0^c\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}\,dx\ \cdots ①$$

(1)(2)より①は

$$S=\left[\log(x+\sqrt{x^2+c^2})\right]_0^c$$

$$=\log(c+\sqrt{2}c)-\log c$$

$$=\log\left(\frac{c+\sqrt{2}c}{c}\right)$$

$$=\log(1+\sqrt{2})$$

$\therefore\ S=\log(1+\sqrt{2})$