神戸大

(1) $r=1+\cos\theta$ である …①

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ であるから

①をそれぞれ代入して

$x=\cos\theta(1+\cos\theta)$

$y=\sin\theta(1+\cos\theta)$

より

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta(1+\cos\theta)+\cos\theta\cdot(-\sin\theta)$$
$$=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$$

$0<\theta<2\pi$ として

$\frac{dx}{d\theta}=0$ とすると $\theta=\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$\theta=\pi$ のとき　$x=0,\ y=0$　$(0,0)$

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき　$x=-\frac{1}{4}$　$y=\frac{\sqrt{3}}{4}$　$\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\theta=\frac{4}{3}\pi$ のとき　$x=-\frac{1}{4}$　$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$　$\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta\cdot(-\sin\theta)$$
$$=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\cos\theta+\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$$
$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$$
$$=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

$0<\theta<2\pi$ として

$\frac{dy}{d\theta}=0$ とすると, $\theta=\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

$\theta=\pi$ のとき　$x=0,\ y=0$　$(0,0)$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき　$x=\frac{3}{4}$　$y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$　$\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

$\theta=\frac{5}{3}\pi$ のとき　$x=\frac{3}{4},\ y=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$　$\left(\frac{3}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

以上より

$\frac{dx}{d\theta}=0$ となる点は $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{4},\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\frac{dy}{d\theta}=0$ となる点は $(0,0)$, $\left(\frac{3}{4},\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(2)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}$$
$$=\frac{(1-\cos^2\theta)(2\cos\theta-1)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\sin\theta(2\cos\theta-1)}{(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

よって $\lim_{x\to\pi}\frac{dy}{dx}=\frac{0\times(-2-1)}{(1-2)\times(1+1)}=0$

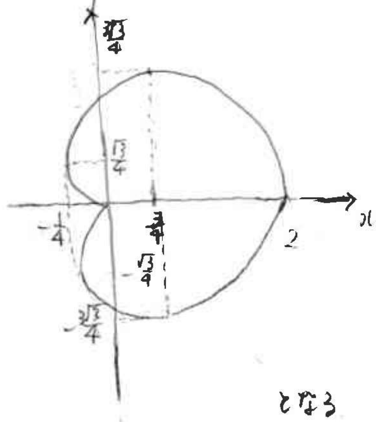
$$\underline{\lim_{x\to\pi}\frac{dy}{dx}=0}$$

(3)

$r(\theta)=1+\cos\theta$ とすると $r(2\pi-\theta)=r(\theta)$ なのでグラフはx軸について対称. したがって $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲を調べればよい

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	↘	$\frac{3}{4}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0

よってグラフは



となる

(4)

$2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$ を求めればよい …①

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta-\sin2\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta+\cos2\theta$

よって

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\sin2\theta+\sin^22\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\cos2\theta+\cos^22\theta$$
$$=2+2(\sin\theta\sin2\theta+\cos\theta\cos2\theta)$$
$$=2+2\{2\sin^2\theta\cos\theta+\cos\theta(2\cos^2\theta-1)\}$$
$$=2+2\{2(1-\cos^2\theta)\cos\theta+2\cos^3\theta-\cos\theta\}$$
$$=2+2\cos\theta$$

∴
$$①=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=8$$

よって長さは $\underline{8}$