(1) $f(x) = x + 2\cos x$

$f'(x) = 1 - 2\sin x$

$f''(x) = -2\cos x$

$f'(x) = 0$ とすると $\sin x = \frac{1}{2}$ より

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

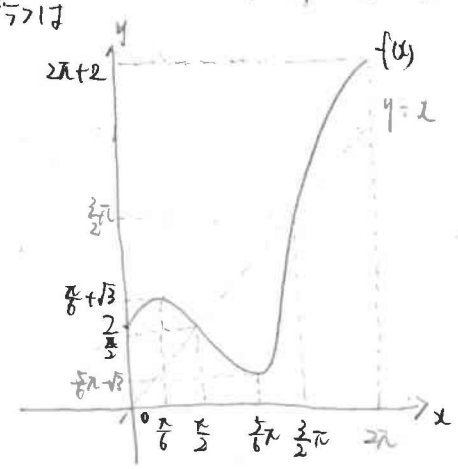
$f''(x) = 0$ とすると $\cos x = 0$ より

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

より増減表をかくと

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$f'(x)$		+	0	−	−	−	0	+	+	+	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	+	+	0	−	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\frac{3}{2}\pi$	↗	$2\pi+2$

グラフは



よって

極値は

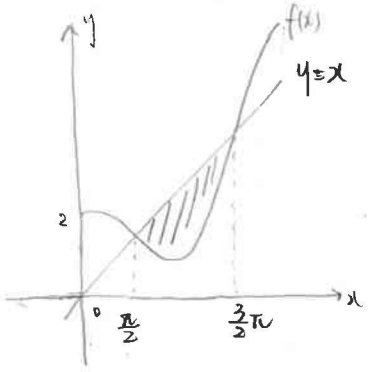
$x = \frac{\pi}{6}$ のとき極大値 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき極小値 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

変曲点は

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

(2) 求める体積は以下の斜線部を x 軸について回転させたもの



求める体積 V は

$$V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} x^2\,dx - \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2\,dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \{x^2 - (x+2\cos x)^2\}\,dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-4x\cos x - 4\cos^2 x)\,dx$$

$$= -4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x\cos x + \cos^2 x)\,dx \quad \cdots (A)$$

ここで

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} x\cos x\,dx$$

$$= [x\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= -2\pi \quad \cdots ①$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \cdots ②$$

①・②より (A) は

$$-4\pi\left(-2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 8\pi^2 - 2\pi^2$$

$$= 6\pi^2$$

$6\pi^2$ //