(1)

$g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$ とおく ∵ $x>0$

$g'(x)=e^x-x-1$ $(x>0)$

$g''(x)=e^x-1$ $(x>0)$

$g''(x)$ は $x\geq 0$ において つねに $g'(x)$ は増加し

$g'(x)>g'(0)=0$ であるから

$g(x)$ は $x\geq 0$ の範囲で増加する。

$x>0$ のとき

$g(x)>g(0)=0$

したがって

$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$ $(x>0)$ が成り立つ

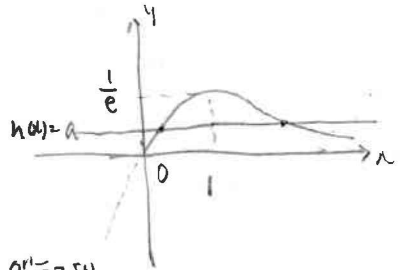
(2)

$f(x)=xe^{-x}$ と $h(x)=a$ を考える $0<a<\frac{1}{e}$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$=(1-x)e^{-x}$

x	0	…	1	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘



グラフより、

$0<a<\frac{1}{e}$ において $f(x)$ と $h(x)$ は $x>0$ の範囲に異なる交点を2つもつ。

よって $f(x)=a$ は異なる2つの正の実数解をもつ。

ちなみに $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ は (1)より

$0<\frac{1}{e^x}<\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$ であり 辺々に x をかけて $(x>0)$

$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$ として 辺々の極限 $x\to\infty$ をとると

はさみうちの原理より $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ となる …(A)

(3)

$\{f(x)\}^2=x^2e^{-2x}$

$\int x^2e^{-2x}dx$ を部分積分していく。

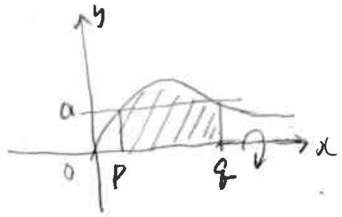
$\int x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int xe^{-2x}dx$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

$=\frac{-2x^2-2x-1}{4e^{2x}}+C$

(4) 求める体積は



$V=\pi\int_p^q\{f(x)\}^2dx$ となり (3)より

$V=\pi\left[\frac{-2x^2-2x-1}{4e^{2x}}\right]_p^q$

$=\pi\left(\frac{-2q^2-2q-1}{4e^{2q}}+\frac{2p^2+2p+1}{4e^{2p}}\right)$

ここで

$\lim_{a\to+0}p=0$

$\lim_{a\to+0}q=+\infty$ なので

左の(A)からわかる

$\lim_{a\to+0}V=\lim_{a\to+0}\pi\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

∴ $\lim_{a\to+0}V=\frac{\pi}{4}$