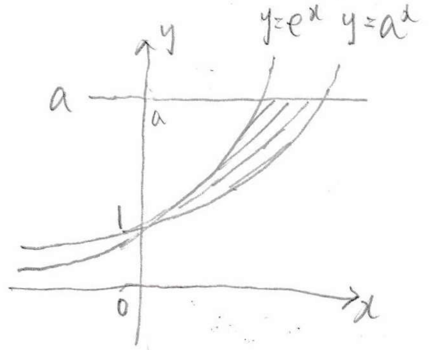
aが1より大きいか小さいかで場合分けが必要。

(i) $1<a<e$ のとき



$\int y\,dx$ で面積が求めにくいので $\int x\,dy$ で積分する方向で考える

$y=e^x$ より　$\log y = x \rightarrow x=\log y$

$y=a^x$ より　$\log y = x\log a \rightarrow x=\dfrac{\log y}{\log a}$

よって求める面積 S は

$$S=\int_1^a\left(\frac{\log y}{\log a}-\log y\right)dy$$

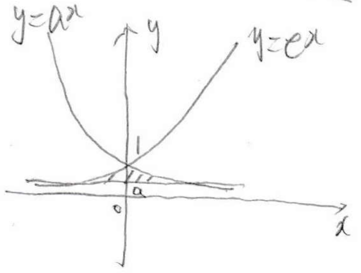
$$=\left(\frac{1}{\log a}-1\right)\int_1^a \log y\,dy$$

$$=\left(\frac{1}{\log a}-1\right)\Big[y\log y-y\Big]_1^a$$

$$=\left(\frac{1}{\log a}-1\right)(a\log a-a+1)$$

$$S=\left(\frac{1}{\log a}-1\right)(a\log a-a+1)$$

(ii) $0<a<1$ のとき



求める面積 S は

$$S=\int_a^1\left(\frac{\log y}{\log a}-\log y\right)dy$$

$$=\left(\frac{1}{\log a}-1\right)\Big[y\log y-y\Big]_a^1$$

$$=\left(\frac{1}{\log a}-1\right)(-1-a\log a+a)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\log a}\right)(a\log a-a+1)$$

$$S=\left(1-\frac{1}{\log a}\right)(a\log a-a+1)$$

以上より

$1<a<e$ のとき

$$\left(\frac{1}{\log a}-1\right)(a\log a-a+1)$$

$0<a<1$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\log a}\right)(a\log a-a+1)$$