理科大.

(1)

$$R_1=\int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{1-a}-1$$

$$=\frac{1}{1-a}-\frac{1-a}{1-a}$$

$$=\frac{a}{1-a}$$

$$R_2=2\int_0^a \frac{(a-x)^1}{(1-x)^3}dx$$

$$=2\int_0^a (a-x)(1-x)^{-3}dx$$

$$=\cancel{2}\int_0^a (a-x)\left\{\frac{1}{\cancel{2}}(1-x)^{-2}\right\}'dx$$

$$=\left[(a-x)(1-x)^{-2}\right]_0^a+\int_0^a(1-x)^{-2}dx$$

$$=0-a+R_1$$

$$=-a+\frac{a}{1-a}$$

$$=\frac{-a+a^2}{1-a}+\frac{a}{1-a}$$

$$=\frac{a^2}{1-a}$$

$$\therefore R_1=\frac{a}{1-a},\ R_2=\frac{a^2}{1-a}$$

(2)

$$R_n=n\int_0^a(a-x)^{n-1}\cdot(1-x)^{-n-1}dx$$

$$=\cancel{n}\int_0^a(a-x)^{n-1}\left(\frac{1}{\cancel{n}}(1-x)^{-n}\right)'dx$$

$$=\left[(a-x)^{n-1}(1-x)^{-n}\right]_0^a+\underbrace{(n-1)\int_0^a(a-x)^{n-2}(1-x)^{-n}dx}_{R_{n-1}}$$

$$=0-a^{n-1}+R_{n-1}$$

これから

$$R_n-R_{n-1}=-a^{n-1}$$

$$R_{n+1}-R_n=-a^n$$

よって $n\geqq 2$ のとき

$$R_n=R_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-a^k)$$

$$=\frac{a}{1-a}-a\cdot\frac{(1-a^{n-1})}{1-a}$$

$$=\frac{a-a+a^n}{1-a}=\frac{a^n}{1-a}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$R_n=\frac{a^n}{1-a}$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}R_n=\frac{a}{1-a}\cdot a^{n-1}$$

$0<a<1$ より和は収束する

その和は

$$\frac{a}{1-a}\cdot\frac{1}{1-a}=\frac{a}{(1-a)^2}$$

$$\frac{a}{(1-a)^2}$$