微分方程式3

$f(x) = x^2e^{-x}$, $y = e^xf(x)$ とするとき，$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ であることを証明せよ。 〔福井工大〕

$y' = e^xf(x) + e^xf'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$ …①

$y'' = e^x(f(x) + f'(x)) + e^x(f'(x) + f''(x))$

$= e^x(f(x) + 2f'(x) + f''(x))$ …②

ここで

与式へ①、②を代入すると

$x^2e^x(f(x) + 2f'(x) + f''(x)) - 2xe^x(f(x) + f'(x)) + 2e^xf(x)$ …③

となり

$f'(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

これより

$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = x^2e^{-x} + 2e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$= \cancel{x^2e^{-x}} + \cancel{4xe^{-x}} \cancel{-2x^2e^{-x}} + \cancel{x^2e^{-x}} \cancel{-4xe^{-x}} + 2e^{-x}$

$= 2e^{-x}$ …④

$f(x) + f'(x) = x^2e^{-x} + e^{-x}(2x - x^2) = 2xe^{-x}$ …⑤

$f(x) = x^2e^{-x}$ …⑥

③に④、⑤、⑥を代入すると

$x^2e^x \cdot 2e^{-x} - 2xe^x \cdot 2xe^{-x} + 2e^x \cdot x^2e^{-x}$

$= 2x^2 - 4x^2 + 2x^2$

$= 0$

以上より

$f(x) = x^2e^{-x}$, $y = e^xf(x)$ のとき，$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ となる