3C 物理 1

座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ があり，x, y が時刻 $t (t \geqq 0)$ の関数として

$$x = e^{-t^2}\cos t^2, y = e^{-t^2}\sin t^2$$

で与えられている。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の速さ $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ を求めよ。

(2) $v(t)$ の最大値と，最大値を与える時刻 T を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^T v(t)\,dt$ を求めよ。ただし，T は (2) で求めた値とする。

〔宇都宮大〕

(1) $\frac{dx}{dt} = -2te^{-t^2}\sin t^2 - 2te^{-t^2}\cos^2 t = -2te^{-t^2}(\sin t^2 + \cos t^2)$

$\frac{dy}{dt} = 2te^{-t^2}\cos t^2 - 2te^{-t^2}\sin t^2 = -2te^{-t^2}(\sin t^2 - \cos t^2)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4t^2e^{-2t^2}(\sin^2 t^2 + 2\sin t^2\cos t^2 + \cos^2 t)$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2e^{-2t^2}(\sin^2 t^2 - 2\sin t^2\cos t^2 + \cos^2 t)$ となり

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2e^{-2t^2} + 4t^2e^{-2t^2} = 8t^2e^{-2t^2}$

$\therefore$ $v(t) = \sqrt{8t^2e^{-2t^2}}$ より $\underline{v(t) = 2\sqrt{2}\,te^{-t^2}}$

(2) $\frac{d}{dt}v(t) = -4\sqrt{2}t^2e^{-t^2} + 2\sqrt{2}e^{-t^2} = -2\sqrt{2}e^{-t^2}(2t^2-1)$

$2t^2-1=0$ を解くと $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $t>0$ より $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極値をとる

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$v'(t)$		$+$	0	$-$
$v(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

$\therefore$ $\underline{T = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき最大値 } \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ をとる}}$

(3) $2\sqrt{2}\int_0^T te^{-t^2} = 2\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^T = 2\sqrt{2}\left\{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ $\underline{\sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{e}}}$