3C だ円 1

$0 \leqq r < 1$ なる実数 r に対し楕円 $C : \dfrac{x^2}{1+r} + \dfrac{y^2}{1-r} = 1$ を考える。直線 $y = x + a$ が楕円 C と第4象限にある点Pで接するとき，次の各問いに答えよ。

(1) a の座標を求めよ。

(2) 点Pと原点を結ぶ直線の傾きが $-\dfrac{1}{4}$ となるのは r がいくつのときか。

〔成蹊大〕

(1) Cと直線が重解をもつ

$$\frac{x^2}{1+r} + \frac{(x+a)^2}{1-r} = 1$$

$$(1-r)x^2 + (x+a)^2(1+r) = (1+r)(1-r)$$

$$x^2 - rx^2 + (x^2+2ax+a^2)(1+r) = 1-r^2$$

$$x^2 - \cancel{rx^2} + x^2 + \cancel{rx^2} + 2ax + 2arx + a^2 + a^2r = 1-r^2$$

$$2x^2 + 2a(1+r)x + a^2(1+r) - 1 + r^2 = 0 \quad \cdots ①$$

判別式=0より

$$4a^2(1+r)^2 - 4\cdot 2\{a^2(1+r) - 1 + r^2\} = 0$$

$$a^2(1+2r+r^2) - 2a^2(1+r) - 2(-1+r^2) = 0$$

$$a^2 + \cancel{2a^2r} + a^2r^2 - 2a^2 - \cancel{2a^2r} + 2 - 2r^2 = 0$$

$$-a^2 + a^2r^2 = -2 + 2r^2$$

$$a^2(r+1)(r-1) = 2(r+1)(r-1)$$

$r \neq -1, 1$ であるから

$$a^2 = 2 \qquad a = \pm\sqrt{2}$$

条件より $a = -\sqrt{2}$

(2)

$a = -\sqrt{2}$ として(1)の①の方程式を解くと $x = \dfrac{\sqrt{2}(1+r)}{2}$ となり y 座標は

$$y = x - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(1+r)}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(r-1)}{2}$$

$\therefore P\left(\dfrac{\sqrt{2}(1+r)}{2}, \dfrac{\sqrt{2}(r-1)}{2}\right)$ であり

原点とPを結ぶ傾きは

$$\frac{\frac{\sqrt{2}(r-1)}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+r)}{2}} = \frac{r-1}{1+r} = -\frac{1}{4}$$

つまり $-4(r-1) = 1+r$ となる これを解くと

$$-4r + 4 = 1 + r$$

$$-5r = -3$$

$$r = \frac{3}{5}$$

$\therefore r = \dfrac{3}{5}$