2C 楕円 2

座標平面において，点 (x, y) が楕円 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 上を動く。このとき，次のことが成り立つ。

(a) $x + 2y$ は，$x = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$，$y = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

(b) $x^2 + \dfrac{2}{3}xy + \dfrac{3}{2}y^2$ は，

$$x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \sqrt{\boxed{}},\ y = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \sqrt{\boxed{}}$$

または

$$x = -\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \sqrt{\boxed{}},\ y = -\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \sqrt{\boxed{}}$$

で最大値 $\boxed{}$ をとる。

〔東京理科大〕

(a) $4x^2+9y^2=36$ 　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ より $x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ とおく

$x+2y=3\cos\theta+4\sin\theta=5\sin(\theta+\alpha)$ 　α は $\cos\theta=\frac{4}{5}$ $\sin\theta=\frac{3}{5}$ となる角

最大になるのは $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のときで $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ となり

$x=3\cos\theta=3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=3\sin\alpha=3\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$

$x=2\sin\theta=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$

$x=\frac{9}{5}$，$y=\frac{8}{5}$ のとき
最大値 5

(b) (1)と同じように $x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ とすると

与式 $=9\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\sin^2\theta$

$=9\left(\frac{\cos2\theta+1}{2}\right)+2\sin2\theta+3(1-\cos2\theta)$

$=\frac{9}{2}\cos2\theta+\frac{9}{2}+2\sin2\theta+3-3\cos2\theta$

$=\frac{3}{2}\cos2\theta+2\sin2\theta+\frac{15}{2}$

$=\frac{5}{2}\sin(2\theta+\beta)+\frac{15}{2}$ 　β は $\sin\beta=\frac{3}{5}$ $\cos\beta=\frac{4}{5}$ となる角であるがこれは(1)のαと一致

$\begin{cases}\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1\\ 2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta\\ \cos2\theta=1-2\sin^2\theta \quad 2\sin^2\theta=1-\cos2\theta\end{cases}$

$\therefore$ $2\theta+\beta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値をとる $2\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$ であるから

$\cos2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta=\sin\alpha=\frac{3}{5}$1

数樂　http://www.mathtext.info/

$\frac{3}{5}=2\cos^2\theta-1$

$2\cos^2\theta=\frac{8}{5}$

$\cos^2\theta=\frac{4}{5} \rightarrow \cos\theta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$ 　$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

$x=3\cos\theta=\frac{6}{5}\times\pm\sqrt5$
$y=2\sin\theta=\frac{2}{5}\times\pm\sqrt5$
$xy>0$ であればよいので

$x=\frac{6}{5}\sqrt5$ $y=\frac{2}{5}\sqrt5$，$x=-\frac{6}{5}\sqrt5$，$y=-\frac{2}{5}\sqrt5$
のとき最大値 $\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=10$ 　10