楕円 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\dfrac{1}{3}\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ 上の点 $\left(\cos\alpha, \dfrac{1}{3}\sin\alpha\right)$ における法線の方程式は,

$$\boxed{}(\sin\alpha)x-(\cos\alpha)y=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\sin 2\alpha$$

である。また, 法線と原点との距離の最大値は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である。ただし, 点Pにおける法線とは, 点Pを通り, 点Pにおける接線に垂直な直線である。 〔日本大〕

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$ $\quad \dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{1}{3}\cos\theta$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\frac{1}{3}\cos\theta}{-\sin\theta}=-\dfrac{\cos\theta}{3\sin\theta}$ …①

∴ 法線の傾きは ①の逆数×(−1) であるから $\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}$ が傾きとなる

方程式は

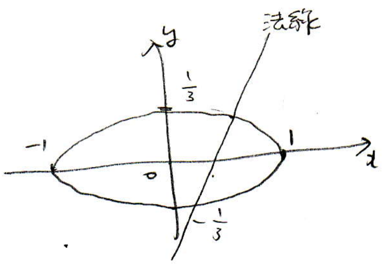
$$y=\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-\cos\alpha)+\frac{1}{3}\sin\theta$$

$y=\dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}x-\dfrac{8}{3}\sin\alpha$ → $3\sin\alpha x-\cos\alpha y-\dfrac{8}{3}\sin\alpha\cos\alpha=0$

$3\sin\alpha x-\cos\alpha y-\dfrac{4}{3}\sin 2\alpha=0$

∴ $3\sin\alpha-\cos\alpha y=\dfrac{4}{3}\sin 2\alpha$ //

$x^2+9y^2=1$ より



原点から法線の距離 l は

$$l=\frac{\left|-\frac{8}{3}\sin\alpha\cos\alpha\right|}{\sqrt{(3\sin\alpha)^2+(-\cos\alpha)^2}}=\frac{\frac{8}{3}\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{8\sin^2\alpha+1}}=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{8\sin^2\alpha+1}}$$

ここで $8\sin^2\alpha+1=t$ とおくと $\sin^2\alpha=\dfrac{t-1}{8}$ より

$$l=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{(t-1)\{8-(t-1)\}}{8\cdot8\cdot t}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(t-1)(9-t)}{t}}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10t-t^2-9}{t}}=\frac{1}{3}\sqrt{10-t-\frac{9}{t}}=\frac{1}{3}\sqrt{10-\left(t+\frac{9}{t}\right)}$$

ここで

$t+\dfrac{9}{t}\geqq2\sqrt{t\cdot\dfrac{9}{t}}=6$

つまり $-\left(t+\dfrac{9}{t}\right)\leqq-6$ より $l\leqq\dfrac{1}{3}\sqrt{10-6}=\dfrac{2}{3}$ よって最大値は $\dfrac{2}{3}$ //

等号は $t=\dfrac{9}{t}$ のときで

$t>0$ より $t=3$ で成立