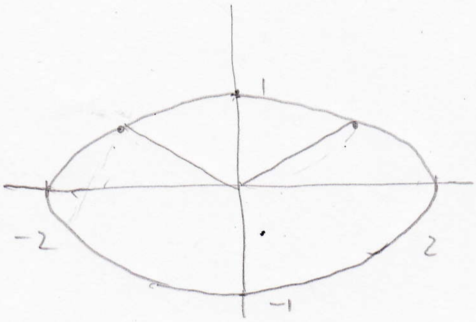
だ円 4

$a>0,\ b>0$ とし, 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の 3 点 $(0,1)$, (a,b), $(-a,b)$ を通る円の半径を r とする。このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{a\to 0} r$ を求めよ。 〔日本女子大〕

$x=2\cos\theta$ $\ y=\sin\theta$ とおく

対称性より自明でいいのかな？



円の中心を $(0,\ p)$ とすると $p<1$ として

円の半径は $r=1-p$ また $r=\sqrt{a^2-(b-p)^2}$ であるから

$$1-p=\sqrt{a^2+(b-p)^2}$$

$$(1-p)^2=a^2+(b-p)^2$$

$$1-2p+p^2=a^2+b^2-2bp+p^2$$

$$p(2b-2)=a^2+b^2-1$$

$$p=\frac{a^2+b^2-1}{2b-2}$$

∴

$$r=1-\frac{a^2+b^2-1}{2b-2}$$

$$=\frac{-a^2-b^2+2b-1}{2b-2}$$

$$\lim_{a\to 0} r=\lim_{a\to 0}\frac{-a^2-b^2+2b-1}{2b-2}$$

∵ $\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$ より

$a^2=4-4b^2$

$a\to 0$ なら $b\to 1-0$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{-4+4b^2-b^2+2b-1}{2(b+1)}$$

$$=\lim_{b\to 1-0}\frac{3b^2+2b-5}{2(b-1)}=\lim_{b\to 1}\frac{(b-1)(3b+5)}{2(b-1)}$$

$$=\lim_{b\to 1}\left(\frac{3b+5}{2}\right)$$

$$=4$$

∴ $\displaystyle\lim_{a\to 0} r=4$