だ円5

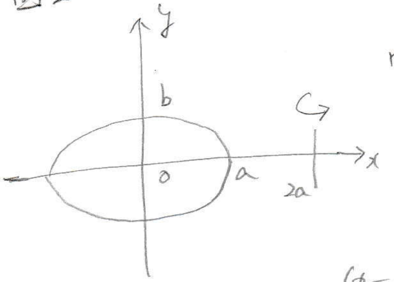
a, bを正の数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形を $x=2a$ のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とおく。次の各問に答えよ。

(1) V を a, b を用いて表せ。

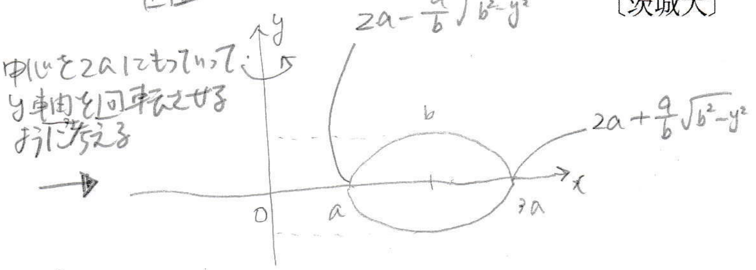
(2) a, b が $a^2+b^2=1$ という関係を満たしながら動くとき, V の最大値を求めよ。

〔茨城大〕

(1) 図I



図II



図IIのだ円の式は $\dfrac{(x-2a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$(x-2a)^2=a^2-\dfrac{a^2}{b^2}y^2$ $\quad x=2a\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

$$V=2\int_0^b \pi\left\{\left(2a+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2-\left(2a-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2\right\}dy$$

$=2\pi\displaystyle\int_0^b \frac{8a^2}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$ ここで $y=b\sin\theta$ とおくと $dy=b\cos\theta\,d\theta$

$=2\pi\displaystyle\int_0^b \frac{8a^2}{b}\cdot b\cos\theta\cdot b\cos\theta\,d\theta=16\pi a^2b\int_0^b\cos^2\theta\,d\theta$

$=8\pi a^2b\displaystyle\int_0^b(1+\cos2\theta)\,d\theta=8\pi a^2b\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{4\pi^2a^2b}$ //

(2)

(1)の式に $a^2=1-b^2$ を代入すると

$V=4\pi^2b(1-b^2)$

$=4\pi^2(b-b^3)$

ここで $f(b)=4\pi^2(b-b^3)$ とおくと

$f'(b)=4\pi^2(1-3b^2)$ $\quad f'(b)=0$ とおくと

$3b^2=1$ より $b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b>0$ より $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(b)$ は極値をとる

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(b)$		+	0	−
$f(b)$		↗	極大	↘

増減表より $f(b)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大かつ最大

よって求める最大値は $V=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\underline{\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2}$ //