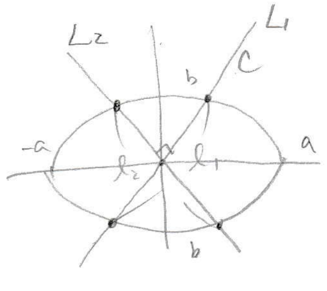
だ円 6

平面上で長軸の長さが $2a$, 短軸の長さが $2b$ である楕円を C とする。L_1, L_2 を C の中心で直交する 2 直線とする。L_1 と C の 2 つの交点の間の距離を l_1 とし, L_2 と C の 2 つの交点の間の距離を l_2 とするとき, $\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}$ は L_1, L_2 の選び方によらず一定であることを証明せよ。

〔群馬大〕



(1) L_1 を $y=mx$ とおいて L_2 を $y=-\frac{1}{m}x$ とおく

だ円の式を

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ …① とするとき $\frac{1}{l_1^2}$ を求めてみる

$y=mx$ を ①に代入すると

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}=1$　　$b^2x^2+a^2m^2x^2=a^2b^2$

∴ $x^2=\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2}$ …②　$x_1=\alpha_x$　$x_2=\alpha_y$　　$\alpha_x>\alpha_y$ (∵α_x, α_yは②の解) とすると

$$\frac{1}{l_1^2}=\frac{1}{(\alpha_x-\alpha_y)^2+(\beta_x-\beta_y)^2}$$ (∵$\beta_x=m\alpha_x$, $\beta_y=m\alpha_y$ とする)

$$=\frac{1}{\left(2\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2}}\right)^2+\left(2m\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2}}\right)^2}=\frac{a^2m^2+b^2}{4(1+m^2)a^2b^2}$$

同様に $\frac{1}{l_2^2}$ を求めると

$$\frac{1}{l_2^2}=\frac{a^2+b^2m^2}{4(m^2+1)a^2b^2}$$

∴

$$\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}=\frac{a^2(\cancel{1+m^2})+b^2(\cancel{1+m^2})}{4(\cancel{1+m^2})a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}$$

L_1, L_2 が x軸 y軸と一致するときは

$$\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}=\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(2b)^2}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}$$

∴以上より L_1, L_2 の式に関係なく一定である.