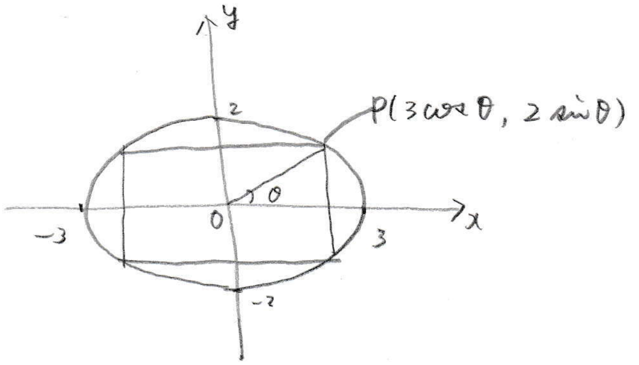
だ円7

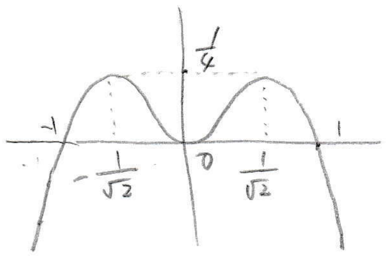
次の設問に答えよ。楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接し，かつ，各辺が座標軸に平行な長方形を S とおく。このとき S の面積の最大値を求めよ。 〔弘前大〕



だ円上の点Pを P(3cosθ, 2sinθ) とおくとき
この長方形の面積Sの最大値を求めるには
$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分の長方形の面積の最大値を調べれば
十分である。この面積をTとすると

$T=6\sin\theta\cos\theta$ ∵ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$
$=6\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$
$=6\sqrt{\sin^2\theta-\sin^4\theta}$

根号の中の式を $\sin\theta=t$ として表すと
t^2-t^4（∵ $0<t<1$）これを $g(t)$ として $g(t)=t^2-t^4$ とおくと
$g'(t)=2t-4t^3$
$=2t(1-2t^2)$
$t=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるが $0<t<1$ より $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値をとる



このとき $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\theta=\frac{\pi}{4}$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）で
$T=6\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=6\cdot\frac{1}{2}=3$ となり
求める面積Sは $S=4T$ であるから
$S=12$（∵ $\theta=\frac{\pi}{4}$）