3C 楕円 8

OK

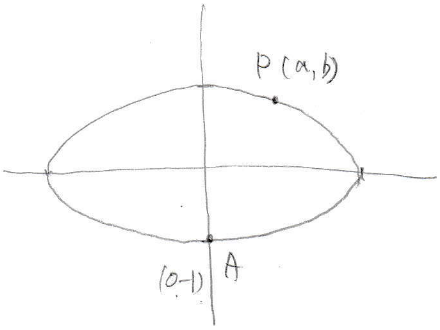
楕円 $C: \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上の点で, $x \geqq 0$ の範囲にあり, 定点 A(0, −1) との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき, 点 Q の座標および △APQ の面積を求めよ。

〔筑波大〕

(1)



$P(a, b)$ とすると

$AP^2 = a^2 + (b+1)^2 \cdots ①$

①で $\dfrac{a^2}{3} + b^2 = 1$

$a^2 = 3 - 3b^2$ として ①に代入すると

$AP^2 = (3-3b^2) + (b+1)^2$

$AP^2 = 3 - 3b^2 + b^2 + 2b + 1 = -2b^2 + 2b + 4$

$AP^2 = -2\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} + 4$

$AP^2 = -2\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}$

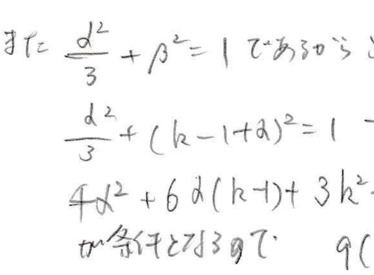
∴ $b = \dfrac{1}{2}$ のとき $AP^2 = \dfrac{9}{2}$ の最大値をとる

$b = \dfrac{1}{2}$ のとき $a^2 = 3 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}$ ∴ $a = \dfrac{3}{2}$ (∵ $a>0$)

また $AP>0$ であるから $AP = \sqrt{\dfrac{9}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

以上より $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $AP = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(2)



直線APを求めると $y = x - 1$ であり $-x + y + 1 = 0$ として

点 $Q(\alpha, \beta)$ と直線APの距離 QH を考える

$QH = \dfrac{|-\alpha + \beta + 1|}{\sqrt{2}}$ となり $-\alpha + \beta + 1$ が最大になることを

考えるとよい $-\alpha + \beta + 1 = k$ として $\beta = k - 1 + \alpha$ とする …①

また $\dfrac{\alpha^2}{3} + \beta^2 = 1$ であるからこれに①を代入すると

$\dfrac{\alpha^2}{3} + (k-1+\alpha)^2 = 1 \to \alpha^2 + 3(k-1+\alpha)^2 = 3 \to \alpha^2 + 3(k-1)^2 + 6\alpha(k-1) + 3\alpha^2 = 3$

$4\alpha^2 + 6\alpha(k-1) + 3k^2 - 6k = 0$ としてこれが実数解をもつためには 判別式 $D/4 \geqq 0$

が条件となるので $9(k-1)^2 - 4(3k^2 - 6k) \geqq 0$

$9k^2 - 18k + 9 - 12k^2 + 24k \geqq 0$

$-3k^2 + 6k + 9 \geqq 0$

$k^2 - 2k - 3 \leqq 0$

$(k-3)(k+1) \leqq 0$

∴ k の範囲は $-1 \leqq k \leqq 3$

∴ k の最大値は 3 となりこのとき $k=3$ として

$4\alpha^2 + 12\alpha + 9 = 0$ が得られ

$(2\alpha + 3)^2 = 0$ ∴ $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ このとき $\beta = \dfrac{1}{2}$

このとき $QH = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ であり $AP = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ であることから

△APQ の面積と Q の座標は

$\dfrac{3}{\sqrt{2}} \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4}$, $Q\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$