2013 香川大

(1)

C_1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ をxで微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

よって (x_1, y_1) における接線の式は

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$$

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2x_1^2}{a^2y_1}+y_1$$

両辺に a^2y_1 をかけると

$$a^2y_1y=-b^2x_1x+b^2x_1^2+a^2y_1^2$$

$$b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^2+a^2y_1^2$$

両辺を a^2b^2 でわると

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} \quad \cdots ①$$

(x_1, y_1) は C_1 上の点なので $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$

よって ① は

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ となり 題意は示せた。

(2) 接点 $A_1(s, t)$, $A_2(u, w)$ とすると

2本の接線は それぞれ(1)より

$$\frac{sx}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

$$\frac{ux}{a^2}+\frac{wy}{b^2}=1 \quad \cdots ② \quad となる$$

①, ② が (p, q) を通るので ①, ② に代入すると

$$\frac{sp}{a^2}+\frac{tq}{b^2}=1$$

$$\frac{up}{a^2}+\frac{wq}{b^2}=1$$

となる

これは $A_1(s, t)$, $A_2(u, w)$ が

直線 $\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$ 上にあると

見れるので 2点 $A_1 A_2$ を通る直線は

$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$ となる。

(3)

(p, q) が C_2 上にあるということは

グラフの対称性から $(p, -q)$ もグラフ上にある。

$(p, -q)$ における C_2 の接線は

$$\frac{px}{a^2}-\frac{(-q)y}{b^2}=1$$

つまり

$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$ となるので

これは C_2 に接する。