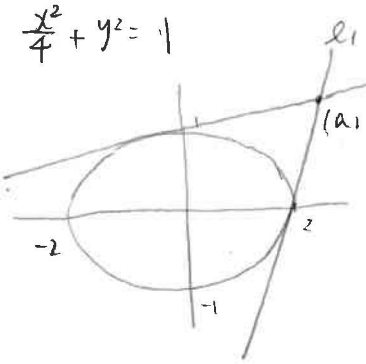
楕円

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$



点(a,b)を通る接線の式を

$y=m(x-a)+b$ とおくと

$\frac{x^2}{4}+\{m(x-a)+b\}^2=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+m^2(x-a)^2+2mb(x-a)+b^2-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+4m^2(x-a)^2+8mb(x-a)+4b^2-4=0$

$\Leftrightarrow x^2+4m^2(x^2-2ax+a^2)+8mbx-8mab+4b^2-4=0$

$\Leftrightarrow (1+4m^2)x^2+(-8m^2a+8mb)x+4m^2a^2-8mab+4b^2-4=0$ …①

①は重解をもつので判別式をDとすると $D/4=0$ なので

$(-4m^2a+4mb)^2-(1+4m^2)(4m^2a^2-8mab+4b^2-4)=0$

$(-4m^2a+4mb)^2-(4m^2a^2-8mab+4b^2-4)-4m^2(4m^2a^2-8mab+4b^2-4)=0$

$\Leftrightarrow 16m^2(-ma+b)^2-(4m^2a^2-8mab+4b^2-4)-\cancel{16m^4a^2}+\cancel{32m^3ab}-\cancel{16m^2b^2}-16m^2=0$

$\Leftrightarrow \cancel{16m^4a^2}-\cancel{32m^3ab}+\cancel{16m^2b^2}-4m^2a^2+8mab-4b^2+4-$

$\Leftrightarrow (a^2-4)m^2-2abm+b^2-1=0$ …②

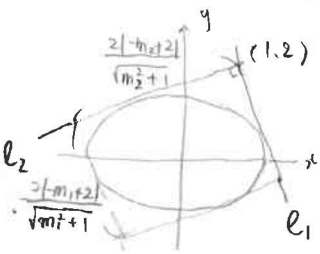
②をmの2次方程式とみるとその解m_1, m_2の積は傾きが直交するので-1

よって解と係数の関係より

$m_1m_2=\frac{b^2-1}{a^2-4}=-1$ これより $b^2-1=-a^2+4 \rightarrow \underline{a^2+b^2=5}$

(2)

$a=1$より $b^2=4$ $b>0$ $b=2$



2つの接線を $y=m_1(x-1)+2$ … l_1

$y=m_2(x-1)+2$ … l_2

とすると原点$(0,0)$からl_1への距離は

$\frac{|-m_1+2|}{\sqrt{m_1^2+1}}$

原点からl_2への距離は

$\frac{|-m_2+2|}{\sqrt{m_2^2+1}}$

したがって長方形の面積は

$\frac{4|(-m_1+2)(-m_2+2)|}{\sqrt{m_1^2+1}\sqrt{m_2^2+1}}$

(1)の②より $m_1+m_2=\frac{2ab}{a^2-4}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$

$m_1m_2=-1$

だから

$\frac{4|m_1m_2-2(m_1+m_2)+4|}{\sqrt{m_1^2m_2^2+m_1^2+m_2^2+1}}$

$=\frac{4|m_1m_2-2(m_1+m_2)+4|}{\sqrt{(m_1m_2)^2+(m_1+m_2)^2-2m_1m_2+1}}$

$=\frac{4|-1+\frac{8}{3}+4|}{\sqrt{1+\frac{16}{9}+2+1}}=\frac{\frac{68}{3}}{\frac{2\sqrt{13}}{3}}=\frac{34}{\sqrt{13}}$

$\underline{\frac{34\sqrt{13}}{13}}$