11

nを自然数とするとき,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つことを証明せよ。　〔有名問題〕

$n=1$のとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$　成り立つ

$n=k$のとき

$(\cos\theta+i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ が成り立つとすると

$n=k+1$において

$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\cos k\theta\cos\theta-\sin\theta\sin k\theta+i(\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta)$

$=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)$

$=\cos\{\theta(k+1)\}+i\sin\{\theta(k+1)\}$

よって $n=k+1$のときも成り立つ

以上より　帰納的に

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立つ.

ことが証明された.