(1) $z^3 = 8i$ を満たす複素数 z を求めなさい。 $0 \leq \theta < 2\pi$

(2) $z^3 = 27i$ を満たす複素数 z を求めなさい。

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと $\because r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とする

$$r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 8i$$

$$r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r^3(\cos3\theta + i\sin3\theta) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad r^3 = 8 \,,\, r = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$= \frac{\pi + 4\pi k}{6} \qquad k = 0, 1, 2 \quad (0 \leq \theta < 2\pi \text{ より})$$

$k=0$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

$k=1$ $\theta = \frac{5}{6}\pi$ のとき $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$ 答

$k=2$ $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき $2(0 - i) = -2i$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく $\because r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とする

$$r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 27i$$

(1)と同様にして $r^3 = 27$ $r = 3$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ とし}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$= \frac{\pi + 4\pi k}{6} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$\theta = \frac{5}{6}\pi$ のとき $3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき $3(0 - i) = -3i$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -3i$$