ごうかく!

ごうかく!

3C 複素数4

いらない

複素平面上で, 点0を中心とする半径1の円を C, 点1を中心とする半径1の円を C' とする。複素数 z の表す点は C 上にあり, 複素数 ω の表す点は C' 上にある。z の偏角を θ とし, $\omega-1$ の偏角は 2θ とする。ただし, $0 \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の問いに答えよ。

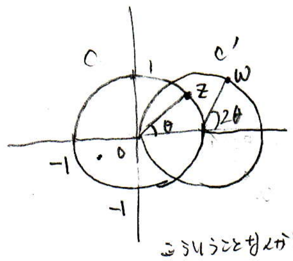
(1) ω を θ を用いて表せ。

(2) ω の実部が z の実部より小さくなる θ の範囲を求めよ。

(3) $|\omega - z| = \sqrt{3}+1$ を満たす θ の値を求めよ。

〔金沢大〕

(1)



こういうことなんかな?

$w-1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

$\therefore \; w = 1+\cos 2\theta + i \sin 2\theta$ //

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと

w の実部は $1+\cos 2\theta$

z の実部は $\cos\theta$

$\therefore \; 1+\cos 2\theta < \cos\theta$

$1+2\cos^2\theta - 1 < \cos\theta$

$\cos\theta(2\cos\theta - 1) < 0$ $\quad 0 < \cos\theta < \frac{1}{2}$

$\therefore \; 60° < \theta < 90°$ //

(3) $|w-z| = 1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta - \cos\theta - i\sin\theta$

$= 1+\cos 2\theta - \cos\theta + i(\sin 2\theta - \sin\theta)$

$= |2\cos^2\theta - \cos\theta + i(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta)|$

$= |\cos\theta(2\cos\theta - 1) + i\sin\theta(2\cos\theta - 1)|$

$\therefore \; |w-z|^2 = \cos^2\theta(2\cos\theta-1)^2 + \sin^2\theta(2\cos\theta-1)^2$

$= (2\cos\theta - 1)^2$

つまりこのとき

$(2\cos\theta-1)^2 = (\sqrt{3}+1)^2$ であるから

i) $2\cos\theta - 1 = \sqrt{3}+1$ か $\quad$ i)のとき $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+2}{2} > 1$ で不適

ii) $2\cos\theta - 1 = -\sqrt{3}-1$ である $\quad$ ii)のとき $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となりこのとき

$\theta = 150°$ //

ごうかく!

ごうかく!