複素数5

原点をOとする複素数平面上において，複素数 α, β の表す点をそれぞれA，Bとする。α, β が

$$|\alpha| = \sqrt{2},\ 2(1+i)\alpha - (\sqrt{3}-i)\beta = 0$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) $|\beta|$ の値を求めよ。

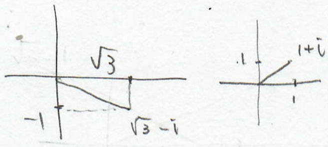
(2) $2(1+i)$ および $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角をそれぞれ $-180°$ より大きく $180°$ 以下の範囲で求めよ。

(3) $\triangle$OABの面積を求めよ。

〔静岡大〕

(1) $(\sqrt{3}-i)\beta = 2(1+i)\alpha$ より $\beta = \dfrac{2(1+i)}{\sqrt{3}-i}\alpha$

$|\beta| = \dfrac{|2(1+i)|}{|\sqrt{3}-i|}|\alpha| = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ $\quad \therefore \underline{|\beta| = 2}$

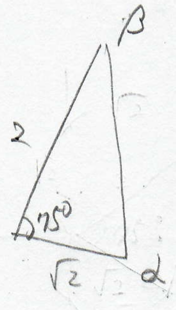


(2) $2(1+i) = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$ $\quad \arg 2(1+i) = 45°$

$\sqrt{3}-i = 2\{\cos(-30°) + i\sin(-30°)\}$ $\quad \arg(\sqrt{3}-i) = -30°$

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2(1+i)}{\sqrt{3}-i} = 45° + 30° = 75°$ $\quad \underline{75°}$

(3)



求める面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\sin 75° = \sqrt{2}\sin 75°$

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45°\cos 30° + \sin 30°\cos 45°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\therefore \underline{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$