ⅢC
複素7

A B C

複素数平面上に異なる 3 点 $z,\ z^2,\ z^3$ がある。

(1) $z,\ z^2,\ z^3$ が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2) $z,\ z^2,\ z^3$ が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また, $z,\ z^2,\ z^3$ が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

〔一橋大〕

(1) 異なる3点より

$z \neq z^2 \quad z^2 \neq z^3 \quad z^3 \neq z$

$(z^2 - z) \neq 0$ より $z(z-1) \neq 0$

$(z^3 - z^2) \neq 0$ より $z^2(z-1) \neq 0$

$(z^3 - z) \neq 0$ より $z(z+1)(z-1) \neq 0$ これより $z \neq 0, \pm 1$

同一直線上にあるのは

$z^3 - z^2 = k(z^2 - z)$ kは実数 となるときより

$\dfrac{z^3 - z^2}{z^2 - z} = \dfrac{z^2(z-1)}{z(z-1)} = z = k$ で、$z \neq 0, \pm 1$ であるから

zは $0, \pm 1$ を除くすべての実数である

(2) $|z^2 - z| = |z^3 - z^2| \to |z||z-1| = |z^2||z-1| \to |z| = 1$

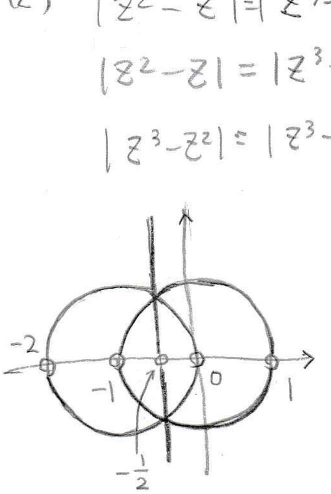
$|z^2 - z| = |z^3 - z| \to |z||z-1| = |z||z+1||z-1| \to |z+1| = 1$

$|z^3 - z^2| = |z^3 - z| \to |z^2||z-1| = |z||z+1||z-1| \to |z| = |z+1|$

$\cos^2\theta + \cancel{\sin^2\theta} = (\cos\theta + 1)^2 + \cancel{\sin^2\theta}$

$2\cos\theta = -1$

$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \quad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



$z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

図: ○は除く 太線部