ⅢC
複素8

複素数平面上に3点 $z$, $z^2$, $z^3$ がこの順に時計回りに位置し，正三角形の3頂点をなすとき，$z = \dfrac{-\boxed{\phantom{0}} - \sqrt{\boxed{\phantom{0}}}\,i}{\boxed{\phantom{0}}}$ である。また，この三角形の三辺の長さの和は $\boxed{\phantom{0}}\sqrt{\boxed{\phantom{0}}}$ である。〔順天堂大〕

(i) $|z^2 - z| = |z^3 - z|$

(ii) $|z^2 - z| = |z^3 - z^2|$

(iii) $|z^3 - z| = |z^3 - z^2|$

(i) より $|z||z-1| = |z||z-1||z+1|$

$1 = |z+1|$

(ii) より $|z||z-1| = |z^2||z-1|$

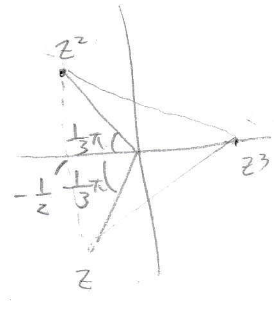
$1 = |z|$

(iii) より

$|z||z+1||z-1| = |z^2||z-1|$

$|z+1| = |z|$

ちなみに $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると $z^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となり 時計回りにならない




$z = \cos\theta + i\sin\theta$ より (i)(ii)(iii) から

$|(\cos\theta + 1) + i\sin\theta| = 1$

$(\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta = 1$

$\cancel{\cos^2\theta} + 2\cos\theta + 1 + 1 - \cancel{\cos^2\theta} = 1$

$2\cos\theta = -1$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ として $\sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 求めるzは $z = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ //

数樂 http://www.mathtext.info/

辺は $\sqrt{3}$ なので $3\sqrt{3}$ // $\quad 3|z-1| = 3\left|\dfrac{-3-\sqrt{3}i}{2}\right|$