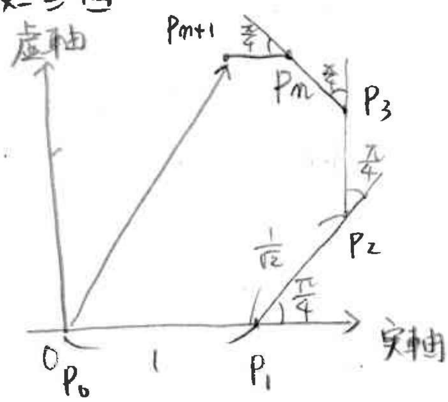
イメージ図



ベクトルで考えると

$$\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ と $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ の関係をみると

$$\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

$$= \left(\frac{1+i}{2}\right)\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

$\overrightarrow{P_0P_1} = 1$ より

$$\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1} \cdots (A)$$

よって $\frac{1+i}{2} = \alpha$ とおくと

$$\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

$$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}$$

$$= \frac{1-\alpha^n}{1+\alpha}$$

$$\overrightarrow{OP_{10}} = \frac{1-\alpha^{10}}{1-\alpha} \cdots ①$$

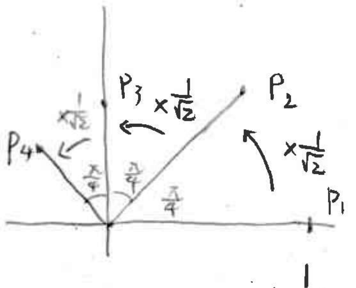
$\alpha = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$\alpha^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\left(\cos\frac{5}{2}\pi + i\sin\frac{5}{2}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{32}i$$

よって ①は $\dfrac{1-\frac{1}{32}i}{1-\frac{1+i}{2}} = \dfrac{32-i}{32-16-16i} = \dfrac{32-i}{16-16i} = \dfrac{32-i}{16(1-i)} = \dfrac{33+31i}{32} \cdots P_{10}$

すべてのベクトルの始点を原点にそろえると



$\frac{\pi}{4}$ 回転させて $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 縮める

$\alpha = \frac{1+i}{2}$ より $|\alpha| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

なので α^n で $n \to \infty$ のとき α^n は収束する

(A)で $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OP_n}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OP_n} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}}$$

$$= \frac{2}{2-1-i}$$

$$= \frac{2}{1-i}$$

$$= \frac{2(1+i)}{2}$$

$$= 1+i$$

$$Q = 1+i$$