



$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 5A + 6E = O$ を満たすとき、 $a+d$ の値を求めなさい。ただし、 E は単位行列、 O は零行列とする。

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

∴

$$A^2 - 5A + 6E = O \text{ 即ち}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-5a+6 & ab+bd-5b \\ ac+cd-5c & bc+d^2-5d+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 即ち}$$

$$a^2+bc-5a+6=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b(a+d-5)=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c(a+d-5)=0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$bc+d^2-5d+6=0 \quad \dots \textcircled{4}$$

②、③ 即ち $a+d-5=0$ ならば $a+d=5 \quad \dots \textcircled{5}$

または $a+d-5 \neq 0$ ならば $b=c=0$

このとき ①、④ 即ち

$$a^2-5a+6=0 \text{ 即ち } (a-2)(a-3)=0 \quad a=2, 3$$

$$d^2-5d+6=0 \text{ 即ち } (d-2)(d-3)=0 \quad d=2, 3$$

$a+d \neq 5$ ならば $(a, d) = (2, 2), (3, 3)$ となる

このとき $a+d$ は 4, 6 $\dots \textcircled{6}$

∴ ⑤、⑥ 即ち

$$a+d \text{ の値は } 4, 5, 6$$

