

$a$  は実数とし、行列  $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 2a & a-1 \end{pmatrix}$  に対して  $B = A^2 + A - 2E$  とおく。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $B = (A + 2E)C$  を満たす行列  $C$  を求めよ。

(2)  $B$  が逆行列をもつかどうか調べ、逆行列をもつときはそれを求めよ。

(1)  $B = (A + 2E)(A - E)$  から

[弘前大]

$$(A + 2E)(A - E) = (A + 2E)C$$

$\therefore$  両辺  $(A + 2E)^{-1}$  をかけると

$$A - E = C$$

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & a-2 \end{pmatrix}$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} a+3 & 1 \\ 2a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$(a+3)(a+1) - 2a = a^2 + 2a + 3 > 0$$

$$= (a+1)^2 + 2 > 0$$

$A + 2E$  は逆行列を持つ。

(2)

$$B = (A + 2E)(A - E)$$

$$B = \begin{pmatrix} a+3 & 1 \\ 2a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & a-2 \end{pmatrix}$$

$$(a+1)(a+3) - 2a = a^2 + 2a + 3$$

$$= (a+1)^2 + 2 > 0$$

$$a(a-2) - 2a = a^2 - 4a$$

$$= a(a-4)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a+3 & 1 \\ 2a & a+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & a-2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(a+3)(a+1) - 2a} \begin{pmatrix} a+1 & -1 \\ -2a & a+3 \end{pmatrix} \frac{1}{a(a-2) - 2a} \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ -2a & a \end{pmatrix} \quad \because a \neq 0, 4$$

$$= \frac{1}{(a^2 + 2a + 3)(a^2 - 4a)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 \\ -2a & a+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ -2a & a \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{(a^2 + 2a + 3)(a^2 - 4a)} \begin{pmatrix} a^2 + a - 2 & -2a - 1 \\ -4a^2 - 2a & a^2 + 5a \end{pmatrix}$$