ごうかく!

ごうかく!

行列11

行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ と, 逆行列が存在する行列 $P=\begin{pmatrix}a&b\\-1&2a\end{pmatrix}$ について, $AP=P\begin{pmatrix}s&0\\0&t\end{pmatrix}$ が成り立っているとき, 以下の問いに答えよ。ただし $a>0$ である。次の問いに答えよ。

(1) a,b,s,t の値を求めよ。

(2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(3) $B=P^{-1}AP$ として, B^n を求めよ。

(4) A^n を求めよ。

〔山梨大〕

(1) $AP=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\-1&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1&2b+2a\\2a-3&2b+6a\end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix}s&0\\0&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\-1&2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s&0\\0&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}as&bt\\-s&2at\end{pmatrix}$ となり条件より

$\begin{cases}2a-1=as \cdots ① \\ 2b+2a=bt \cdots ② \\ 2a-3=-s \cdots ③ \\ 2b+6a=2at \cdots ④\end{cases}$

③より $s=3-2a$ となり ①に代入すると

$2a-1=a(3-2a)$

$2a^2-a-1=0$ $(a-1)(2a+1)=0$, $a=1,-\frac{1}{2}$ となり $s=1,4$ となる

i) $a=1$ のとき $2b+2=bt \cdots ②'$ $2b+6=2t \cdots ④'$ ④'より $t=b+3$ を ②'に代入して $2b+2=b(b+3)$ $b^2+b-2=0$ $(b+2)(b-1)=0$ $\therefore b=-2,1$

このとき, $t=1,4$ $\therefore (a,b,s,t)=(1,-2,1,1),(1,1,1,4)$

ii) $a=-\frac{1}{2}$ のとき $2b-1=bt \cdots ②'$ $2b-3=-t \cdots ④'$ ④'より $t=-2b+3$ を②'に代入し

$2b-1=b(-2b+3)$ $2b^2-b-1=0$ $(b-1)(2b+1)=0$ $\therefore b=1,-\frac{1}{2}$ このとき $t=2,4$

$\therefore (a,b,s,t)=(-\frac{1}{2},1,4,2),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},4,4)$

Pは逆行列をもつので

$2a^2+b\neq 0$ を満たし, $a>0$ なのは $\underline{(a,b,s,t)=(1,1,1,4)}$

(2) (1)より $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ より $P^{-1}=\frac{1}{2+1}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$ $\therefore P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$

(3) $B^n=P^{-1}A^nP=P^{-1}\cdot P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}^n$ $\therefore B^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&4^n\end{pmatrix}$

(4)

$A^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4^n\\-1&2\cdot4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$\therefore \underline{A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+4^n&-1+4^n\\-2+2\cdot4^n&1+2\cdot4^n\end{pmatrix}}$

ごうかく!

ごうかく!