1次変換

行列13

平面上の1次変換 f が直線 $l: 3x-y-3=0$ を直線 $l': 5x-y-18=0$ にうつし，直線 $m: x+2y-8=0$ を直線 $m': x-3y+16=0$ にうつすとき，f を表す行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を求めよ。〔早稲田大〕

l 上の点 $(1,0)$ $(0,-3)$ を考える

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdots ① \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3b \\ -3d \end{pmatrix} \cdots ②$$

①,②は l' 上にあるので $\begin{cases} 5a-c-18=0 \\ -15b+3d-18=0 \end{cases} \to \begin{cases} 5a-c=18 \\ -5b+d=6 \end{cases} \cdots (a)$

m 上の点 $(8,0)$ $(0,4)$ を考えると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8a \\ 8c \end{pmatrix} \cdots ③ \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4b \\ 4d \end{pmatrix} \cdots ④$$

③,④は m' 上にあるので $\begin{cases} 8a-24c+16=0 \\ 4b-12d+16=0 \end{cases} \to \begin{cases} a-3c=-2 \\ b-3d=-4 \end{cases} \cdots (b)$

(a),(b)より

$$\begin{cases} 5a-c=18 \\ a-3c=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5b+d=6 \\ b-3d=-4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 5a-c=18 \\ -) & 5a-15c=-10 \\ \hline & 14c=28 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & -5b+d=6 \\ +) & 5b-15d=-20 \\ \hline & -14d=-14 \end{array}$$

$c=2$ $\quad$ $d=1$

$a=4$ $\quad$ $b=-1$

よって $a=4,\ b=-1,\ c=2,\ d=1$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$