行列15

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ に対し，次の各問いに答えよ。ただし，$0 < c < 1$ である。

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(2) 行列の積 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(3) $D_n = (P^{-1})^n AP^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，D_n を求めよ。

(4) 行列 D_n の (1, 2) 成分を d_n とするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ を求めよ。

〔同志社大〕

(1) $\underline{\frac{1}{c}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(2) $\frac{1}{c}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} c & ac^2 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $\therefore$ $\underline{\begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(3) $(P^{-1})^n A P^n = (P^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^n$

(2)より $(P^{-1})^2 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^2 = P^{-1}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} PP = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$

$= \frac{1}{c}\begin{pmatrix} c & ac^3 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

以下

$(P^{-1})^{n-1} P^{-1}AP \cdot P^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & ac^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{D_n = (P^{-1})^n A P^n = \begin{pmatrix} 1 & ac^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(4) $d_n = ac^n = ac \cdot c^{n-1}$ となり 初項 ac，公比 c の等比数列

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} ac \cdot c^{n-1} = \frac{ac}{1-c}$

$0 < c < 1$ であるから 収束する $\therefore$ $\underline{\frac{ac}{1-c}}$