$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

行列17

2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $A^2 + (ad - bc)E = (a + d)A$ が成り立つことを示せ。ただし, E は2次の単位行列とする。

(2) $a + d = -2,\ ad - bc = 4$ のとき, A^3 を求めよ。

(3) $A^3 = O$ ならば, $A^2 = O$ となることを示せ。ただし, O は零行列とする。

〔弘前大〕

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$A^2+(ad-bc)E = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & d^2+ad \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)A$

$\therefore\ A^2+(ad-bc)E = (a+d)A$

(2)

$A^2+4E=-2A$　$A^2=-4E-2A$ …① となりこれから $A^3=-4A-2A^2$ で①より

$A^3=-4A-2(-4E-2A)$

$A^3=8E$　　$\therefore\ A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(3)

$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$ より …①

$A^3=(a+d)A^2-(ad-bc)A$ でありこれが零行列であることから

$(a+d)A^2-(ad-bc)A=0$ …②

$A^3=0$ よりAが逆行列をもつと $E=0$ となり矛盾するのでAは逆行列をもたない

つまり $ad-bc=0$ となるので②は

$(a+d)A^2=0$ となる、このとき①は $A^2=(a+d)A$ であるから

$(a+d)^2A=0$ となることから　$a+d=0$ または $A=0$

$a+d=0$, $ad-bc=0$ のとき ①より $A^2=0$.

$A=0$ のとき $A^2=0$　よって $A^3=0$ のとき $A^2=0$ である