行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ で表わされる1時変換によって直線 $\ell : x+2y=1$ が直線 $\ell' : 3x+y=1$ にうつされるとする。

(1) a, b, c, d が満たされなければならない条件を求めよ。

(2) 上の条件の他にさらに $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ を満たすような A を定めよ。

〔長崎大〕

(1)

(例) 直線の像 → 2点の像を考える

ℓ 上の2点 $(1, 0)$ と $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ の A による移動

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}b\\ \frac{1}{2}d\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

これらは ℓ' 上にあるから ℓ' に代入して

$$3a+c=1$$

$$\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}d=1$$

これより

$$c=1-3a$$

$$d=2-3b$$

(2) (1)より

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 1-3a & 2-3b\end{pmatrix}$$ となり

$$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ 1-3a & 2-3b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 1-3a & 2-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b(1-3a) & ab+b(2-3b)\\ a(1-3a)+(1-3a)(2-3b) & b(1-3a)+(2-3b)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{cases}a^2+b(1-3a)=1 & \cdots ①\\ b(a-3b+2)=0 & \cdots ②\\ (1-3a)(a-3b+2)=0 & \cdots ③\\ b(1-3a)+(2-3b)^2=1 & \cdots ④\end{cases}$$

②より $b=0$ とすると④が成立しない

③より $1-3a=0$ or $a-3b+2=0$ で

$3a=1$ より $a=\frac{1}{3}$ とすると ①が成り立たないので

$a-3b+2=0$ として

$a=3b-2$ を①に代入すると

$$(3b-2)^2+b(1-9b+6)=1$$

$$9b^2-12b+4+b-9b^2+6b=1$$

$$-5b=-3$$

$$b=\frac{3}{5}$$

$$a=\frac{9}{5}-2=-\frac{1}{5}$$

$$c=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

$$d=2-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}$$

これらより

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{8}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & 1\end{pmatrix} \quad \cdots 答$$