行列6

実数 a, b, c, d を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^2 = A$ を満たし，零行列ではなく，逆行列を持たないとする。

(1) $a + d = 1$ であることを示せ。

(2) このような A に対する $ad + bc$ の値が最大になるときの a, d, bc の値を求めよ。

〔室蘭工大〕

(1)

$ad - bc = 0$ …①

$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a^2+bc = a$ …② $ab+bd = b$ …③

$ac+cd = c$ …④ $bc+d^2 = d$ …⑤

①と②より

$a^2 + ad = a$

$a^2 + a(d-1) = 0$

$a(a+d-1) = 0$

③より $b(a+d-1) = 0$

④より $c(a+d-1) = 0$

①と⑤より $d(a+d-1) = 0$

となり $a+d-1 \neq 0$ とすると

$a = b = c = d = 0$ となり 条件に合わない

$\therefore$ $a+d-1 = 0$

すなわち $a+d = 1$ である

(2) $ad = bc$ より $a = 1-d$ であるから

$ad+bc = 2ad = 2d(1-d)$

$= 2d - 2d^2$

$= -2\left(d-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ $\therefore$ $d = \frac{1}{2}$ のとき最大 このとき $a = \frac{1}{2}$

$ad = bc$ より $bc = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $a = \frac{1}{2}, \ d = \frac{1}{2}, \ bc = \frac{1}{4}$