練習7

$A=\begin{pmatrix}4 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 2\end{pmatrix}$ に対して $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, a>0, d>0$ を満たす実数 a, b, c, d を求めよ。

(2) $(A^3+2A)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ を満たす実数 k を求めよ。

(3) $A^n\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ を求めよ。ただし, n は自然数とする。

〔岩手大〕

(1) $\begin{pmatrix}4 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a+\sqrt{3}b\\ \sqrt{3}a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{cases}3a+\sqrt{3}b=0\\ \sqrt{3}a+b=0\end{cases}$ $\therefore b=-\sqrt{3}a$

$\begin{pmatrix}4 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4c+\sqrt{3}d\\ \sqrt{3}c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5c\\5d\end{pmatrix}$ $\begin{cases}c-\sqrt{3}d=0\\ 3d-\sqrt{3}c=0\end{cases}$ $\therefore c=\sqrt{3}d$

$a^2+b^2=a^2+(-\sqrt{3}a)^2=4a^2=1$ $\therefore a^2=\frac{1}{4}$ $a>0$ より $a=\frac{1}{2}$ $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2+d^2=(\sqrt{3}d)^2+d^2=4d^2=1$ $\therefore d^2=\frac{1}{4}$ $d>0$ より $d=\frac{1}{2}$ $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{2}, b=-\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\frac{\sqrt{3}}{2}, d=\frac{1}{2}$

(2)

$A^2\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=A\cdot A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=A\cdot 5\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=A^2 5\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=125\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ $2A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$\therefore (A^3+2A)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=(125+10)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ $\therefore k=135$ ∵成分 c,d が共に0の時はkは任意の実数

(3)

(1)より $\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ より $A\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}+\sqrt{3}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ とすると $A^n\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}+\sqrt{3}A^n\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

これより

$A^n\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}+\sqrt{3}\cdot 5^n\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ $A^n\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 5^n+1\\ \sqrt{3}\cdot 5^n-\sqrt{3}\end{pmatrix}$